

Corrigé de la liste d'exercices n°20

Applications linéaires

Exercice 1

1. L'application f n'est pas linéaire car $f(0, 0) = (1, 0) \neq (0, 0)$.
2. • Montrons que f est linéaire.

Soient $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $v = (x', y') \in \mathbb{R}^2$ et (λ, μ) deux réels. On a

$$\begin{aligned} f(\lambda u + \mu v) &= f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y') \\ &= (\lambda(x - y) + \mu(x' - y'), \lambda(x + 3y) + \mu(x' + 3y'), \lambda x + \mu x') \\ &= \lambda(x - y, x + 3y, x) + \mu(x' - y', x' + 3y', x') \\ &= \lambda f(u) + \mu f(v) \end{aligned}$$

donc f est linéaire.

- On a $(x, y) \in \ker(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x + 3y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0$ donc $\ker(f) = \{(0, 0)\}$ d'où $\dim(\ker(f)) = 0$ (donc f est injective).

- On a

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \{(x - y, x + 3y, x) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x(1, 1, 1) + y(-1, 3, 0) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \text{Vect}\{(1, 1, 1), (-1, 3, 0)\}. \end{aligned}$$

Puisque les vecteurs $(1, 1, 1)$ et $(-1, 3, 0)$ sont libres (car non colinéaires), on en déduit que $\dim(\text{Vect}\{(1, 1, 1), (-1, 3, 0)\}) = 2$ d'où $\dim(\text{Im}(f)) = 2$.

3. On a $f(1, 0) = (0, 0)$, $f(-1, 0) = (2, 0)$ et $f(0, 0) = (0, 0)$.
Ainsi, $f((1, 0) + (-1, 0)) = f(0, 0) = (0, 0) \neq f(1, 0) + f(-1, 0) = (2, 0)$ donc l'application f n'est pas linéaire.
4. • Montrons que f est linéaire.

Soient $u = (x, y, z) \in \mathbb{C}^3$, $v = (x', y', z') \in \mathbb{C}^3$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

Alors

$$f(\lambda u + \mu v) = f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z') = \lambda z + \mu z' - (\lambda y + \mu y') = \lambda(z - y) + \mu(z' - y') = \lambda f(u) + \mu f(v)$$

donc f est linéaire.

- On a

$$(x, y, z) \in \ker(f) \Leftrightarrow z - y = 0 \Leftrightarrow y = z \Leftrightarrow (x, y, z) = (x, y, y) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 1)$$

donc $\ker(f) = \text{Vect}\{(1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$. Puisque les vecteurs $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, 1)$ sont libres (car non colinéaires), on en déduit que $\dim(\ker(f)) = 2$.

- Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors $z = f(0, 0, z)$ donc l'application f est surjective d'où $\text{Im}(f) = \mathbb{C}$ donc $\dim(\text{Im}(f)) = 1$.

5. L'application f n'est pas linéaire car $f(0, 0) = (0, 1, 0) \neq (0, 0, 0)$.

6. On a $f(1, 1) = (8, 1, 1)$ et $f(-1, -1) = (-8, 1, -1)$ donc

$$f(-1, -1) = f(-(1, 1)) \neq -f(1, 1)$$

ce qui prouve que f n'est pas linéaire.

7. • Montrons que f est linéaire.

Soient $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $u' = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} f(\lambda u + \mu v) &= f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z') \\ &= (\lambda(x + y) + \mu(x' + y'), \lambda(x - y) + \mu(x' - y')) \\ &= \lambda f(u) + \mu f(v) \end{aligned}$$

donc f est linéaire.

• On a $(x, y, z) \in \ker(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ -2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0$ donc $\ker(f) = \{(0, 0, z) | z \in \mathbb{R}\} = \{z(0, 0, 1) | z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\{(0, 0, 1)\}$ d'où $\dim(\ker(f)) = 1$.

• On a

$$\text{Im}(f) = \{(x+y, x-y) | (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1, 1) + y(1, -1) | (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}\{(1, 1), (1, -1)\}$$

donc $\dim(\text{Im}(f)) = 2$ (puisque les vecteurs $(1, 1)$ et $(1, -1)$ ne sont pas colinéaires).

8. On a $f(1, 0) = (1, 0) = f(-1, 0)$ donc $f(-1, 0) = f(-(1, 0)) \neq -f(1, 0)$, ce qui prouve que f n'est pas linéaire.

9. • Montrons que f est linéaire.

Soient $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} f(\lambda u + \mu v) &= f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z') \\ &= (\lambda(3x - y) + \mu(3x' - y'), \lambda(y + 5z) + \mu(x' + 5z'), \lambda y + \mu y') \\ &= \lambda(3x - y, y + 5z, y) + \mu(3x' - y', x' + 5z', y') \\ &= \lambda f(u) + \mu f(v) \end{aligned}$$

donc f est linéaire.

• On a

$$(x, y, z) \in \ker(f) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 0 \\ y + 5z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0)$$

donc $\ker(f) = \{(0, 0, 0)\}$ d'où $\dim(\ker(f)) = 0$ et f est injective.

• On a

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \{(3x - y, y + 5z, y) | (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{x(3, 0, 0) + y(-1, 1, 1) + z(0, 5, 0) | (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \text{Vect}\{(3, 0, 0), (-1, 1, 1), (0, 5, 0)\}. \end{aligned}$$

Montrons que la famille $\{(3, 0, 0), (-1, 1, 1), (0, 5, 0)\}$ est libre.

Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\alpha(3, 0, 0) + \beta(-1, 1, 1) + \gamma(0, 5, 0) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha - \beta = 0 \\ \beta + 5\gamma = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

C'est une famille libre constituée de trois vecteurs libres dans \mathbb{R}^3 : c'est donc une base de \mathbb{R}^3 . On en déduit que $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$ donc $\dim(\text{Im}(f)) = 3$ (et f est surjective).

10. Soit $a \in \mathbb{R}$.

• Montrons que f est linéaire.

Soient $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Alors

$$\begin{aligned} f(\lambda u + \mu v) &= f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z') \\ &= (\lambda(a^2x - y) + \mu(a^2x' - y'), \lambda y + \mu y', 0) \\ &= \lambda(a^2x - y, y, 0) + \mu(a^2x' - y', y', 0) \\ &= \lambda f(u) + \mu f(v) \end{aligned}$$

donc f est linéaire.

• On a

$$(x, y, z) \in \ker(f) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2x - y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Deux cas se présentent alors :

- Si $a \neq 0$, on a $x = y = 0$ donc $\ker(f) = \{(0, 0, z) | z \in \mathbb{R}\} = \{z(0, 0, 1) | z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\{(0, 0, 1)\}$ donc $\dim(\ker(f)) = 1$.

- Si $a = 0$, alors $\ker(f) = \{(x, 0, z) | (x, z) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1, 0, 0) + z(0, 0, 1) | (x, z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$ donc $\dim(\ker(f)) = 2$ (puisque les vecteurs $(1, 0, 0)$ et $(0, 0, 1)$ ne sont pas colinéaires).

• On a $\text{Im}(f) = \{(a^2x - y, y, 0) | (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(a^2, 0, 0) + y(-1, 1, 0) | (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}\{(a^2, 0, 0), (-1, 1, 0)\}$.

Deux cas se présentent alors :

- Si $a \neq 0$, alors les vecteurs $(a^2, 0, 0)$ et $(-1, 1, 0)$ ne sont pas colinéaires donc $\dim(\text{Im}(f)) = 2$.

- Si $a = 0$, alors $\text{Im}(f) = \text{Vect}\{(-1, 1, 0)\}$ donc $\dim(\text{Im}(f)) = 1$.

Exercice 2

1. Soit $x \in \ker(f)$. Montrons que $g(x) \in \ker(f)$.

Puisque $f \circ g = g \circ f$, on a $f(g(x)) = g(f(x))$. Or, $f(x) = 0_E$ puisque $x \in \ker(f)$ donc $f(g(x)) = g(0_E) = 0_E$ car g est linéaire.

Ainsi, on a bien $g(x) \in \ker(f)$ ce qui prouve que $\ker(f)$ est stable par g .

• Soit $y \in \text{Im}(f)$. Montrons que $g(y) \in \text{Im}(f)$.

Puisque $y \in \text{Im}(f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ donc $g(y) = g(f(x)) = f(g(x))$ car $f \circ g = g \circ f$ donc on a bien $g(y) = f(g(x)) \in \text{Im}(f)$, ce qui prouve que $\text{Im}(f)$ est stable par g .

Exercice 3

Par hypothèse, pour tout $x \in E$, les vecteurs x et $f(x)$ sont colinéaires.

Si $x = 0$, c'est évident car $f(x) = x = 0_E$.

Si $x \neq 0_E$, ceci signifie qu'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda x$. A priori, ce scalaire λ dépend du choix du vecteur x . On va montrer qu'on peut en fait choisir le même λ pour tous les vecteurs x de l'espace vectoriel E .

Soient x et y deux vecteurs non nuls de E .

Il existe donc deux scalaires $(\lambda_x, \lambda_y) \in \mathbb{K}^2$ tels que $f(x) = \lambda_x x$ et $f(y) = \lambda_y y$.

Montrons que $\lambda_x = \lambda_y$.

Il y a deux cas.

• Supposons que les vecteurs x et y soient colinéaires, i.e. il existe un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $y = \alpha x$. Notons qu'on a nécessairement $\alpha \neq 0$ car $y \neq 0$.

Alors par linéarité de f , on a $f(y) = f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha \lambda_x x$.

D'autre part, on a $f(y) = \lambda_y y = \alpha \lambda_y x$.

Donc $\alpha \lambda_x x = \alpha \lambda_y x$, d'où $(\lambda_x - \lambda_y)\alpha x = 0_E$. Or, $\alpha x \neq 0_E$ car $\alpha \neq 0$ et $x \neq 0_E$ donc $\lambda_x - \lambda_y = 0$ d'où $\lambda_x = \lambda_y$.

• Supposons que les vecteurs x et y ne soient pas colinéaires, i.e. la famille (x, y) est libre.

Par hypothèse, il existe un scalaire $\lambda_{x+y} \in \mathbb{K}$ tel que $f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_{x+y}x + \lambda_{x+y}y$.

Par ailleurs, par linéarité de f , on a

$$f(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y.$$

Par unicité des coordonnées dans une famille libre, on a $\lambda_x = \lambda_{x+y}$ et $\lambda_y = \lambda_{x+y}$ donc $\lambda_x = \lambda_y$.

Dans tous les cas, pour tout couple de vecteurs (x, y) non nuls, on a $\lambda_x = \lambda_y$ donc il existe un $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $f(x) = \lambda x$.

L'égalité restant trivialement vraie pour $x = 0_E$ (car $f(x) = 0_E$), on a bien montré l'existence d'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $x \in E$, $f(x) = \lambda x$.

Exercice 4

Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{k=0}^n \lambda_k f^k(x) = 0_E$.

En appliquant f^{n-1} à cette égalité, et sachant que pour tout $k \geq n$, $f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$, on obtient $\lambda_0 f^{n-1}(x) = 0_E$.

Or, $f^{n-1}(x) \neq 0_E$ par hypothèse donc $\lambda_0 = 0$.

En appliquant maintenant f^{n-2} , on obtient $\lambda_1 = 0$ et en répétant le même procédé de proche en proche, on obtient pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\lambda_k = 0$ ce qui prouve que la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est libre.

Exercice 5

1. L'application linéaire canoniquement associée à cette matrice est

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longrightarrow & (x+y+z, x+y+z, x+y+z). \end{array}$$

On a

$$(x, y, z) \in \ker(f) \Leftrightarrow x+y+z=0 \Leftrightarrow (x, y, z) = (x, y, -x-y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1)$$

$$\text{donc } \ker(f) = \text{Vect}\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}.$$

Enfin,

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \{(x+y+z, x+y+z, x+y+z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{(x+y+z)(1, 1, 1) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \text{Vect}\{(1, 1, 1)\}. \end{aligned}$$

2. L'application linéaire canoniquement associée à cette matrice est

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ x & \longrightarrow & (x, 4x, 0). \end{array}$$

On a $\ker(f) = \{0\}$ donc f est injective et $\text{Im}(f) = \text{Vect}\{(1, 4, 0)\}$.

3. L'application linéaire canoniquement associée à cette matrice est

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longrightarrow & (z, y). \end{array}$$

On a $\ker(f) = \{(x, 0, 0) | x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\{(1, 0, 0)\}$.

Enfin, $\text{Im}(f) = \{(z, y) | (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \{y(0, 1) + z(1, 0) | (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}\{(0, 1), (1, 0)\}$.

4. L'application linéaire canoniquement associée à cette matrice est

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longrightarrow & (x + 5y, 4x + 20y, 7x + 35y). \end{array}$$

On $(x, y) \in \ker(f) \Leftrightarrow x + 5y = 0 \Leftrightarrow x = -5y \Leftrightarrow (x, y) = (-5y, y) = y(-5, 1)$ donc $\ker(f) = \text{Vect}\{(-5, 1)\}$.

Enfin,

$\text{Im}(f) = \{(x+5y, 4x+20y, 7x+35y) | (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{(x+5y)(1, 4, 7) | (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}\{(1, 4, 7)\}$.

5. L'application linéaire canoniquement associée à cette matrice est

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longrightarrow & (x + 7y, 8x + y, 9x + y). \end{array}$$

On a

$$(x, y) \in \ker(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 7y = 0 \\ 8x + y = 0 \\ 9x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7y \\ -55y = 0 \\ -62y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$$

d'où $\ker(f) = \{(0, 0)\}$ donc f est injective.

Enfin,

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \{(x + 7y, 8x + y, 9x + y) | (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x(1, 8, 9) + y(7, 1, 1) | (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \text{Vect}\{(1, 8, 9), (7, 1, 1)\}. \end{aligned}$$

6. L'application linéaire canoniquement associée à cette matrice est

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longrightarrow & (x + 2y, 4x + 5y). \end{array}$$

On a $(x, y) \in \ker(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 4x + 5y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ -3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$ d'où $\ker(f) = \{(0, 0)\}$ donc f est injective.

Enfin, $\text{Im}(f) = \{(x + 2y, 4x + 5y) | (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1, 4) + y(2, 5) | (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}\{(1, 4), (2, 5)\}$.

Or, les vecteurs $(1, 4)$ et $(2, 5)$ ne sont pas colinéaires donc ils forment une base de \mathbb{R}^2 .

On en déduit que $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ donc f est surjective.

Finalement, l'application linéaire f est bijective : c'est un automorphisme de \mathbb{R}^2 .

7. L'application linéaire canoniquement associée à cette matrice est

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longrightarrow & (0, x, 0). \end{array}$$

On a $\ker(f) = \{(0, y, z) | (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \{y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) | (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

Enfin, $\text{Im}(f) = \{(0, x, 0) | x \in \mathbb{R}\} = \{x(0, 1, 0) | x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\{(0, 1, 0)\}$. On remarque en particulier que $\text{Im}(f) \subset \ker(f)$, ce qui implique que $f^2 = 0$.

8. L'application linéaire canoniquement associée à cette matrice est

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longrightarrow & x + 2y + 4z. \end{array}$$

On a $\ker(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2y + 4z = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = -2y - 4z\} = \{(-2y - 4z, y, z) | (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \{y(-2, 1, 0) + z(-4, 0, 1) | (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}\{(-2, 1, 0), (-4, 0, 1)\}$.

Enfin, $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R} différent de $\{0\}$ car f n'est pas l'application nulle donc $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$, ce qui prouve que f est surjective.

Exercice 6

1. • Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(1, 1, 1) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$ donc la famille \mathcal{B}_2 est libre. Puisqu'elle est constituée de trois vecteurs de \mathbb{R}^3 , c'est une base de \mathbb{R}^3 .
- Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha(1, 0, 0) + \beta(1, 1, 0) + \gamma(1, 1, 1) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$ donc la famille \mathcal{B}_3 est libre. Puisqu'elle est constituée de trois vecteurs de \mathbb{R}^3 , c'est une base de \mathbb{R}^3 .

2. (a) Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f) = A$.

On a alors $f(1, 0, 0) = -(1, 0, 0) + 3(0, 1, 0) - 2(1, 1, 1) = (-3, 1, -2)$, $f(0, 1, 0) = (1, 0, 0) - 2(0, 1, 0) + (1, 1, 1) = (2, -1, 1)$ et $f(0, 0, 1) = (1, 0, 0) - 4(0, 1, 0) + 3(1, 1, 1) = (4, -1, 3)$.

Ainsi, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a par linéarité de f :

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f(x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)) \\ &= xf(1, 0, 0) + yf(0, 1, 0) + zf(0, 0, 1) \\ &= x(-3, 1, -2) + y(2, -1, 1) + z(4, -1, 3) \\ &= (-3x + 2y + 4z, x - y - z, -2x + y + 3z). \end{aligned}$$

- (b) Soit g l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(g) = A$.

On a alors $g(1, 0, 0) = -1(1, 0, 0) + 3(0, 1, 0) - 2(0, 0, 1) = (-1, 3, -2)$; $g(0, 1, 0) = (1, 0, 0) - 2(0, 1, 0) + (0, 0, 1) = (1, -2, 1)$ et $g(1, 1, 1) = (1, 0, 0) - 4(0, 1, 0) + 3(0, 0, 1) = (1, -4, 3)$.

En particulier, $g(0, 0, 1) = g((1, 1, 1) - (1, 0, 0) - (0, 1, 0)) = g(1, 1, 1) - g(1, 0, 0) - g(0, 1, 0) = (1, -4, 3) - (-1, 3, -2) - (1, -2, 1) = (1, -5, 4)$ donc pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} g(x, y, z) &= g(x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)) \\ &= xg(1, 0, 0) + yg(0, 1, 0) + zg(0, 0, 1) \\ &= x(-1, 3, -2) + y(1, -2, 1) + z(1, -5, 4) \\ &= (-x + y + z, 3x - 2y - 5z, -2x + y + 4z). \end{aligned}$$

- (c) Soit h l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1}(h) = A$.

On a alors $h(1, 0, 0) = 1(1, 0, 0) + 3(0, 1, 0) - 2(0, 0, 1) = (-1, 3, -2)$; $h(0, 1, 0) = (1, 0, 0) - 2(0, 1, 0) + (0, 0, 1) = (1, -2, 1)$ et $h(0, 0, 1) = (1, 0, 0) - 4(0, 1, 0) + 3(0, 0, 1) =$

$(1, -4, 3)$ donc pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} h(x, y, z) &= h(x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)) \\ &= xh(1, 0, 0) + yh(0, 1, 0) + zh(0, 0, 1) \\ &= x(-1, 3, -2) + y(1, -2, 1) + z(1, -4, 3) \\ &= (-x + y + z, 3x - 2y - 4z, -2x + y + 3z). \end{aligned}$$

3. (a) La matrice B est de rang 1 donc on a $\text{rg}(f) = 1$ et d'après le théorème du rang, on en déduit que $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\ker(f)) + \text{rg}(f)$ d'où $\dim(\ker(f)) = 2$.

On sait que l'image de f est engendrée par les images des vecteurs de la base \mathcal{B}_3 donc $\text{Im}(f) = \text{Vect}\{f(1, 0, 0); f(1, 1, 0); f(1, 1, 1)\}$.

Or, $f(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$ et $f(1, 1, 0) = f(1, 1, 1) = (1, 0, 0) + (0, 1, 0) + (1, 1, 1) = (2, 2, 1)$ donc $\text{Im}(f) = \text{Vect}\{(2, 2, 1)\}$.

Enfin, on a $(1, 0, 0) \in \ker(f)$ et $(1, 1, 1) - (1, 1, 0) = (0, 0, 1) \in \ker(f)$ puisque $f(0, 0, 1) = f(1, 1, 1) - f(1, 1, 0) = (0, 0, 0)$ donc $(0, 0, 1) \in \ker(f)$.

Puisque la famille $((1, 0, 0), (0, 0, 1))$ est libre, est contenue dans $\ker(f)$ et que $\dim(\ker(f)) = 2$, on en déduit que c'est une base de $\ker(f)$.

(b) Les dimensions de l'image et du noyau de g sont les mêmes que dans la question précédente puisqu'elles dépendent du rang de B .

On a comme ci-dessus, $\ker(f) = \text{Vect}\{(1, 0, 0), (1, 1, 1) - (0, 1, 0)\} = \text{Vect}\{(1, 0, 0), (1, 0, 1)\}$ et $\text{Im}(f) = \text{Vect}\{f(0, 1, 0)\} = \text{Vect}\{(1, 0, 0) + (1, 1, 0) + (1, 1, 1)\} = \text{Vect}\{(3, 2, 1)\}$.

(c) De même, $\ker(f) = \text{Vect}\{(1, 0, 0), (1, 1, 1) - (0, 1, 0)\} = \text{Vect}\{(1, 0, 0), (1, 0, 1)\}$ et $\text{Im}(f) = \text{Vect}\{f(0, 1, 0)\} = \text{Vect}\{(1, 0, 0) + (0, 1, 0) + (1, 1, 1)\} = \text{Vect}\{(2, 2, 1)\}$.

Exercice 7

1. Simple calcul !

2. La question précédente montre que la matrice de $f^3 - 2f^2 + f - 2\text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ est nulle, ce qui prouve que $f^3 - 2f^2 + f - 2\text{Id}_{\mathbb{R}^3} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ ou encore $\frac{1}{2}(f^2 - 2f + \text{Id}_{\mathbb{R}^3}) \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

On en déduit que f est bijective, donc f est un automorphisme de \mathbb{R}^3 et

$$f^{-1} = \frac{1}{2}(f^2 - 2f + \text{Id}_{\mathbb{R}^3}).$$

Exercice 8

1. On a

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \ker(f - 3\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) &\Leftrightarrow (A - 3I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -5x - 2y + z = 0 \\ -2x - 2y - 2z = 0 \\ x - 2y - 5z = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{\substack{L_2 \leftarrow -5L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow -5L_3 + L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -5x - 2y + z = 0 \\ -6y - 12z = 0 \\ -12y - 24z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -2z \end{cases} \end{aligned}$$

donc $\ker(f - 3\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \text{Vect}\{(1, -2, 1)\}$.

2. On a

$$\begin{aligned}
 (x, y, z) \in \ker(f + 3\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) &\Leftrightarrow (A + 3I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -2x + 4y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow x - 2y + z = 0
 \end{aligned}$$

donc $\ker(f + 3\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \text{Vect}\{(1, 0, -1), (1, 1, 1)\}$.

3. Montrons que la famille $\mathcal{B} = ((1, -2, 1), (1, 0, -1), (1, 1, 1))$ est libre.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\alpha(1, -2, 1) + \beta(1, 0, -1) + \gamma(1, 1, 1) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -2\alpha + \gamma = 0 \\ \alpha - \beta + \gamma = 0 \end{cases} \begin{matrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1} \\ \xleftrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \\ \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \end{matrix} \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 2\beta + 3\gamma = 0 \\ -2\beta = 0 \end{cases}$$

donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$, ce qui prouve que la famille \mathcal{B} est libre. Puisqu'elle est constituée de trois vecteurs de \mathbb{R}^3 et que $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, on en déduit que \mathcal{B} est une base de \mathbb{R}^3 .

Puisque $(1, -2, 1) \in \ker(f - 3\text{Id}_{\mathbb{R}^3})$, on a $(f - 3\text{Id}_{\mathbb{R}^3})(1, -2, 1) = (0, 0, 0)$ donc

$$f(1, -2, 1) = 3(1, -2, 1).$$

De même puisque $(1, 0, -1) \in \ker(f + 3\text{Id}_{\mathbb{R}^3})$, on a $(f + 3\text{Id}_{\mathbb{R}^3})(1, 0, -1) = (0, 0, 0)$ donc $f(1, 0, -1) = -3(1, 0, -1)$, et enfin $f(1, 1, 1) = -3(1, 1, 1)$.

On en déduit que la matrice de f dans la base \mathcal{B} est $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 9

Montrons que la matrice A est inversible et calculons son inverse.

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 6L_1, L_3 \leftarrow L_3 - 6L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & -6 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow{L_1 \leftarrow -5L_1 + 2L_2, L_3 \leftarrow -5L_3 - 7L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -5 & 0 & 0 & -7 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 12 & -7 & 5 \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow{L_1 \leftarrow -\frac{1}{5}L_1, L_2 \leftarrow -\frac{1}{5}L_2, L_3 \leftarrow \frac{1}{10}L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{5} & -\frac{7}{10} & \frac{1}{2} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

donc A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ -\frac{6}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{6}{5} & -\frac{7}{10} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Puisque A est la matrice de f dans la base canonique de \mathbb{R}^3 , on en déduit que f est un automorphisme de \mathbb{R}^3 et que la matrice de f^{-1} dans la base canonique de \mathbb{R}^3 est A^{-1} donc pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f^{-1}(x, y, z) = (\frac{7}{5}x - \frac{2}{5}y, \frac{6}{5}x - \frac{1}{5}y, \frac{6}{5}x - \frac{7}{10}y + \frac{1}{2}z)$.

Exercice 10

1. Calculons le rang de la matrice A . On a

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow -2L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

donc $\text{rg}(A) = 3$, ce qui prouve que la matrice A est inversible. Puisqu'elle est la matrice de f dans la base canonique de \mathbb{R}^3 , on en déduit que f est un automorphisme de \mathbb{R}^3 .

2. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 4\gamma = 0 \\ \alpha - \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} \alpha + \beta + 4\gamma = 0 \\ -2\beta - 2\gamma = 0 \\ -3\gamma = 0 \end{cases}$$

donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$, ce qui prouve que la famille est libre. Puisqu'elle est constituée de trois vecteurs de \mathbb{R}^3 et que $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, on en déduit que c'est une base de \mathbb{R}^3 .

3. (a) On a pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (2x + y - 2z, x, y)$ donc

$$f(u_1) = f(1, 1, 1) = (1, 1, 1) = u_1.$$

Ensuite, $f(u_2) = f(1, -1, 1) = (-1, 1, -1) = -u_2$ et $f(u_3) = f(4, 2, 1) = (8, 4, 2) = 2u_3$ donc la matrice de f dans la base \mathcal{B} est $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) Calculons l'inverse de P . On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow -2L_1 + L_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow -\frac{1}{3}L_3]{L_1 \leftarrow -\frac{1}{2}L_1, L_2 \leftarrow -\frac{1}{6}L_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & | & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & | & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow -\frac{1}{2}L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -6 & 0 & | & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow -\frac{1}{6}L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -3 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow -\frac{1}{3}L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

donc P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

On a alors

$$PDP^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice de f^n dans la base canonique de \mathbb{R}^3 est

$$\begin{aligned} A^n = PD^nP^{-1} &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & (-1)^n & 2^{n+2} \\ 1 & (-1)^{n+1} & 2^{n+1} \\ 1 & (-1)^n & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 + (-1)^n + 2^{n+3} & 3(1 + (-1)^{n+1}) & 6 + 2(-1)^n - 2^{n+3} \\ -3 + (-1)^{n+1} + 2^{n+2} & 3(1 + (-1)^n) & 6 + 2(-1)^{n+1} - 2^{n+2} \\ -3 + (-1)^n + 2^{n+1} & 3(1 + (-1)^{n+1}) & 6 + 2(-1)^n - 2^{n+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 11

1. • Montrons que φ est linéaire.

Soient $(P, Q) \in (\mathbb{R}_{n+1}(X))^2$, soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P + \mu Q) &= ((\lambda P + \mu Q)(a_0), \dots, (\lambda P + \mu Q)(a_n)) \\ &= \lambda(P(a_0), \dots, P(a_n)) + \mu(Q(a_0), \dots, Q(a_n)) \\ &= \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q) \end{aligned}$$

donc φ est linéaire.

• On a pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\varphi(X^k) = (a_0^k, \dots, a_n^k)$ donc la matrice de φ dans les bases

canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$ et \mathbb{R}^{n+1} est $\begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \dots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$.

2. • Montrons que φ est injective. Pour cela, montrons que $\ker(\varphi) = \{0\}$. On a toujours $0 \in \ker(\varphi)$.

Soit $P \in \ker(\varphi)$. Alors pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(a_k) = 0$. Puisque les $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$ sont deux à deux distincts, on en déduit que P admet au moins $n + 1$ racines distinctes. Or, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ donc $\deg(P) \leq n$. A fortiori, P admet plus de racines que son degré, ce qui implique que $P = 0$.

Ainsi, $\ker(\varphi) = \{0\}$ donc φ est injective.

• Puisque $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1 = \dim(\mathbb{R}^{n+1})$, l'injectivité de l'application linéaire φ implique sa bijectivité donc φ est un isomorphisme.

Exercice 12

La première implication est une conséquence directe du théorème du rang.

Réciproquement, supposons que $\dim(F) + \dim(G) = n$.

Notons $p = \dim(F)$ et $q = \dim(G)$.

Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ une base de F , soit $(u_i)_{1 \leq i \leq q}$ une base de G . On complète la famille $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ en une base de E , qu'on note $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$.

On va construire une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\ker(f) = F$ et $\text{im}(f) = G$ en définissant les images des vecteurs $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ par f .

On pose

$$f(e_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq i \leq p \\ u_{i-p} & \text{si } i \geq p + 1. \end{cases}$$

L'application f vérifie alors clairement $\ker(f) = F$ et $\text{im}(f) = G$.

Exercice 13

1. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \ker(f^k)$. Alors $f^k(x) = 0_E$ donc par linéarité de f , on en déduit que $f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(0_E) = 0_E$, ce qui prouve que $x \in \ker(f^{k+1})$. On a donc bien l'inclusion $\ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1})$.
- (b) • Si pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'inclusion $\ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1})$ était stricte, on aurait pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dim(\ker(f^k)) < \dim(\ker(f^{k+1}))$. Pour k assez grand, on aurait $\dim(\ker(f^k)) > \dim(E)$, ce qui est absurde. Nécessairement, il doit exister un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $\ker(f^p) = \ker(f^{p+1})$.
- Montrons alors que pour tout $k \geq p$, $\ker(f^k) = \ker(f^p)$. Montrons ce résultat par récurrence sur $k \geq p$.
- Pour $k = p$, le résultat est trivial.
- Soit $k \geq p$ fixé tel que $\ker(f^k) = \ker(f^p)$. Montrons que $\ker(f^{k+1}) = \ker(f^p)$.
Puisque $k + 1 \geq p$, on sait d'après la première question que $\ker(f^p) \subset \ker(f^{k+1})$.
Montrons que $\ker(f^{k+1}) \subset \ker(f^p)$.
Soit $x \in \ker(f^{k+1})$, i.e. $f^{k+1}(x) = 0_E$ donc $f^k(f(x)) = 0_E$.
Ainsi, $f(x) \in \ker(f^k) = \ker(f^p)$ par hypothèse de récurrence, donc $f^p(f(x)) = f^{p+1}(x) = 0_E$.
Ainsi, $x \in \ker(f^{p+1}) = \ker(f^p)$, ce qui prouve bien l'inclusion $\ker(f^{k+1}) \subset \ker(f^p)$ puis l'égalité $\ker(f^{k+1}) = \ker(f^p)$.
- Par principe de récurrence, on a bien pour tout $k \geq p$, $\ker(f^k) = \ker(f^p)$.
2. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \text{Im}(f^{k+1})$. Il existe alors $a \in E$ tel que $x = f^{k+1}(a) = f^k(f(a)) \in \text{Im}(f^k)$ donc on a bien l'inclusion $\text{Im}(f^{k+1}) \subset \text{Im}(f^k)$.
- (b) D'après le théorème du rang appliqué à f^p et à f^{p+1} , on a

$$\dim(E) = \dim(\ker(f^p)) + \dim(\text{Im}(f^p)) = \dim(\ker(f^{p+1})) + \dim(\text{Im}(f^{p+1})).$$

Puisque $\ker(f^p) = \ker(f^{p+1})$, on en déduit $\dim(\text{Im}(f^p)) = \dim(\text{Im}(f^{p+1}))$. Or, on a l'inclusion $\text{Im}(f^{p+1}) \subset \text{Im}(f^p)$. On peut donc conclure que $\text{Im}(f^p) = \text{Im}(f^{p+1})$ par égalité des dimensions.

De même, pour tout $k \geq p$, $\ker(f^k) = \ker(f^p)$ et $\text{Im}(f^k) \subset \text{Im}(f^p)$ donc on conclut une nouvelle fois que $\text{Im}(f^k) = \text{Im}(f^p)$ grâce au théorème du rang.

Exercice 14

- Montrons l'implication $\ker(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\} \Rightarrow \ker(f) = \ker(f^2)$.
Supposons que $\ker(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}$. L'inclusion $\ker(f) \subset \ker(f^2)$ est toujours vraie et évidente. Montrons que $\ker(f^2) \subset \ker(f)$.
Soit $x \in \ker(f^2)$. Alors $0_E = f^2(x) = f(f(x))$ donc $f(x) \in \ker(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}$. On en déduit que $f(x) = 0_E$, donc $x \in \ker(f)$, ce qui prouve l'inclusion $\ker(f^2) \subset \ker(f)$.
Finalement, on a bien $\ker(f) = \ker(f^2)$.
- Montrons l'implication $\ker(f) = \ker(f^2) \Rightarrow \text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$.
Supposons que $\ker(f) = \ker(f^2)$.
L'inclusion $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$ est toujours vraie et évidente.
D'après le théorème du rang, on a

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\ker(f^2)) + \dim(\text{Im}(f^2)).$$

Puisque $\ker(f) = \ker(f^2)$, on en déduit $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(\text{Im}(f^2))$. Ainsi, $\text{Im}(f)$ et $\text{Im}(f^2)$ ont même dimension, donc l'inclusion $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$ est en fait une égalité.

• Montrons l'implication $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2) \Rightarrow \forall x \in E, \exists (y, z) \in \ker(f) \times \text{Im}(f), x = y + z$.
 Soit $x \in E$. Alors $f(x) \in \text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$ par hypothèse donc il existe $y \in E$ tel que $f(x) = f^2(y)$.

Ainsi, on a $f(f(y) - x) = 0_E$ d'où $z = f(y) - x \in \ker(f)$. On a donc bien $x = f(y) + (-z)$ avec $f(y) \in \text{Im}(f)$ et $(-z) \in \ker(f)$.

• Enfin, montrons l'implication $\forall x \in E, \exists (y, z) \in \ker(f) \cap \text{Im}(f), x = y + z \Rightarrow \ker(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}$.

L'hypothèse implique que $E = \ker(f) + \text{Im}(f)$. D'après la formule de Grassmann, on a donc

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \text{rg}(f) - \dim(\ker(f) \cap \text{Im}(f)).$$

Or, d'après le théorème du rang, on a également

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \text{rg}(f).$$

Nécessairement, il en découle que $\dim(\ker(f) \cap \text{Im}(f))$, i.e. $\ker(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}$.

Exercice 15

• Supposons que $f \circ f = 0$ et qu'il existe $h \in \mathcal{L}(E)$, $f \circ h + h \circ f = \text{Id}_E$.

Montrons tout d'abord que $\text{Im}(f) \subset \ker(f)$.

Soit $x \in \text{Im}(f)$. Il existe $a \in E$ tel que $x = f(a)$ donc $f(x) = f \circ f(a) = 0$ puisque $f \circ f = 0$ par hypothèse donc $x \in \ker(f)$, ce qui prouve l'inclusion $\text{Im}(f) \subset \ker(f)$.

Soit $x \in \ker(f)$. On a alors $x = f \circ h(x) + h \circ f(x) = f(h(x)) + h(0_E) = f(h(x)) \in \text{Im}(f)$ donc on a bien l'inclusion $\ker(f) \subset \text{Im}(f)$.

Finalement, on a bien montré l'égalité $\ker(f) = \text{Im}(f)$.

• Supposons que $\ker(f) = \text{Im}(f)$.

- Montrons que $f \circ f = 0$. Pour tout $x \in E$, on a $f(x) \in \text{Im}(f) = \ker(f)$ donc $f(f(x)) = 0_E$, ce qui prouve que $f \circ f = 0$.

- Montrons qu'il existe $h \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ h + h \circ f = \text{Id}_E$.

Soit (e_1, \dots, e_n) une base de $\ker(f) = \text{Im}(f)$. On a alors $\dim(\ker(f)) = \dim(\text{Im}(f)) = n$ et d'après le théorème du rang, $\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = 2n$.

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Puisque $e_i \in \text{Im}(f)$, il existe $u_i \in E$ tel que $f(u_i) = e_i$.

Montrons que $(u_1, \dots, u_n, e_1, \dots, e_n)$ est une base de E .

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^{2n}$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i + \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = 0_E$.

En appliquant f à cette dernière égalité, on obtient

$$0_E = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(u_i) + \sum_{i=1}^n \alpha_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i.$$

Puisque la famille (e_1, \dots, e_n) est une base de $\ker(f)$, c'est une famille libre donc pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_i = 0$.

Il reste donc $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = 0_E$ et pour la même raison, on obtient que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\alpha_i = 0$

donc la famille $(u_1, \dots, u_n, e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre à $2n$ éléments de E : c'est donc une base de E .

Construisons alors h en donnant les images des vecteurs de la base $(u_1, \dots, u_n, e_1, \dots, e_n)$.

Posons pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ $h(u_i) = 0_E$ et $h(e_i) = u_i$. Ceci définit une application $h \in \mathcal{L}(E)$.

On a alors pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$f \circ h(u_i) + h \circ f(u_i) = h(e_i) = u_i \quad \text{et} \quad f \circ h(e_i) + h \circ f(e_i) = f(u_i) = e_i$$

donc $f \circ h + h \circ f$ et Id_E coïncident sur la base $(u_1, \dots, u_n, e_1, \dots, e_n)$.

On a donc $f \circ h + h \circ f = \text{Id}(E)$.