
DEVOIR MAISON N°1
À RENDRE POUR LE VENDREDI 13 SEPTEMBRE 2024

Exercice 1.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2.$$

2. On considère une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de nombres réels strictement positifs telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n x_k^3 = \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = n$.

Indication : on pourra utiliser une récurrence forte.

Exercice 2. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on ait

$$f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

Indication : on pourra commencer par déterminer la valeur de $f(0)$.

Exercice 3. Sur l'île de Bôté se trouvent d'attachantes et étranges créatures : les Pomékon. Ces créatures sont d'autant plus étranges qu'elles parlent et comprennent le français et qu'elles ont un sens logique très affiné. Il y a deux sortes de Pomékon : les Pomékon de base, qui ne profèrent que des phrases qu'ils croient vraies, et les Pomékon évolués, qui au contraire ne disent que des choses qu'ils croient fausses. Ce que croient les Pomékon dépend de la qualité du dressage qu'ils ont reçu : les Pomékon bien dressés croient vraies les choses vraies et fausses les choses fausses ; c'est bien entendu l'inverse pour les Pomékon mal dressés, qui croient fausses les choses vraies et vraies les choses fausses. On notera ainsi qu'un Pomékon évolué et mal dressé, ayant des croyances erronées et une tendance irrépressible à dire le contraire de ce qu'il croit, ne dira que la vérité. Dans les énigmes ci-dessous, vous devez analyser logiquement les dires de quelques créatures de l'île de Bôté et en déduire leur stade d'évolution et la qualité du dressage qu'ils ont reçu.

Énigme 1. Pticachou : « Je suis un Pomékon de base ou je suis bien dressé. »

Énigme 2. Perspicouac : « Je ne suis pas un Pomékon de base bien dressé. »

Énigme 3. J'ai demandé à Roudoudou : « Êtes-vous un Pomékon évolué mal dressé ? » Sa réponse me suffit à déterminer son niveau d'évolution et son niveau de dressage. Déterminez-les.

Énigme 4. Samalèche : « Je suis un Pomékon de base si et seulement si je suis mal dressé. »