Liste d'exercices n°1 — Logique, ensembles et raisonnement

Exercice 1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Traduire les assertions suivantes en langage mathématique et donner leur négation.

1. La fonction f est bornée.
2. La fonction f n'est pas la fonction nulle.
3. La fonction f ne s'annule jamais.
4. La fonction f est décroissante.
5. La fonction f admet un minimum global en 2.

Exercice 2. Traduire les assertions suivantes en langage mathématique.

1. Entre deux nombres réels distincts, on peut toujours trouver un nombre rationnel.
2. Tout réel admet un entier naturel qui lui est supérieur.
3. Tout réel est limite d'une suite de nombres rationnels.

Exercice 3. Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

1. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x$.
2. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y^2 > x$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 > x$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x$.

Exercice 4. Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses et donner leur négation.

1. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists y \in \mathbb{R}_+, x + y > 0$ et $x - y \geqslant 0$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$ ou $xy \leqslant 0$.

Exercice 5. Formuler la négation des assertions suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant 0$;
2. $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$;
3. $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leqslant a$;
4. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \mathrm{L}| \leqslant \varepsilon)$.

Exercice 6. Soit F un ensemble de fonctions. On considère les deux assertions :

$$\mathrm{P} : \text{« } \forall f \in \mathrm{F}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \text{ »};$$

$$\mathrm{Q} : \text{« } \exists x \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathrm{F}, f(x) = 0. \text{ »}$$

Laquelle des deux implications $\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$ ou $\mathrm{Q} \Rightarrow \mathrm{P}$ est toujours vraie ? Laquelle est fausse ? Donner un contre-exemple.

Exercice 7. Soit x un nombre irrationnel positif. Montrer que $\sqrt{x}$ est irrationnel.

Exercice 8. Soit E un ensemble, soient A et B deux sous-ensembles de E.

Montrer que $\mathrm{A} = \mathrm{B} \Leftrightarrow \mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{A} \cap \mathrm{B}$.

Exercice 9. Soit E un ensemble, soient A et B deux sous-ensembles de E.

1. Montrer que :
   (a) $\mathrm{A} = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}})$,
   (b) $\overline{\mathrm{A} \cup \overline{\mathrm{B}}} = \mathrm{B} \setminus \mathrm{A}$.
2. Simplifier l'écriture $\overline{\mathrm{B}} \cup \left(\overline{\overline{\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}} \cap \overline{\mathrm{A}}}\right)$.

Exercice 10. Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ trois ensembles. Montrer que $\mathrm{A} = \mathrm{B}$ si et seulement si $\mathrm{A} \cap \mathrm{C} = \mathrm{B} \cap \mathrm{C}$ et $\mathrm{A} \cup \mathrm{C} = \mathrm{B} \cup \mathrm{C}$.

Exercice 11. Considérons les ensembles suivants :

$$\mathrm{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 4x - y = 1\} \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = \{(t + 1, 4t + 3) | t \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que $\mathrm{A} = \mathrm{B}$.

Exercice 12. Soit E un ensemble. Soit A une partie de E. Déterminer les parties X de E vérifiant :

1. $A \cup X = E$
2. $A \cap X = A$
3. $A \cup X = A$

Exercice 13. Soit E un ensemble, soient A et B deux sous-ensembles de E. On appelle différence symétrique de A et B, et on note $A\Delta B$, l'ensemble
$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

1. Montrer que $A\Delta B = B\Delta A$.
2. Proposer une autre écriture de $A\Delta B$.
3. Calculer $A\Delta\emptyset, A\Delta A$, $A\Delta E$ et $A\Delta B$ dans le cas où $A \subseteq B$.
4. Simplifier $(A\Delta B) \cup (A\Delta\overline{B})$.
5. Soit C un sous-ensemble de E.
   (a) Montrer que $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$.
   (b) Montrer que $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$.

Exercice 14. Montrer que l'ensemble $\mathscr{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ ne peut pas s'écrire comme le produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$.

Exercice 15. Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$\left\{\begin{array}{c} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e^{u_n}. \end{array}\right.$$
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Exercice 16. Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$\left\{\begin{array}{c} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 3n(n+3) + 7. \end{array}\right.$$

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis conjecturer une formule simple pour l'expression de u_n.
2. Vérifier cette conjecture par récurrence.

Exercice 17. Montrer que pour tout entier naturel $n, u_n = 3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 17.

Exercice 18. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1, u_1 = \cos(\theta)$ et pour $n \geqslant 2, u_n = 2u_1 u_{n-1} - u_{n-2}$.
Calculer u_n pour tout entier n.

Exercice 19. Montrer par récurrence forte que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, il existe des nombres premiers $(p_1, \dots, p_k)$ et des entiers $\alpha_i \geqslant 1$ tels que
$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}.$$

Exercice 20. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait :
$$f(x) + x f(1-x) = 1 + x.$$