Liste d'exercices n°2 — Nombres réels

Exercice 1. Soient x et y deux réels tels que $0 < x \leqslant y$. On définit :

- la moyenne arithmétique de x et y par $m = \dfrac{x+y}{2}$;
- la moyenne géométrique de x et y par $g = \sqrt{xy}$;
- la moyenne harmonique de x et y par $h = \left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\right]^{-1}$.

Montrer que $x \leqslant h \leqslant g \leqslant m \leqslant y$.

Exercice 2. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On définit

$$\max(x,y) = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant y \\ y & \text{si } y \geqslant x \end{cases} \quad \text{et} \quad \min(x,y) = \begin{cases} x & \text{si } x \leqslant y \\ y & \text{si } y \leqslant x. \end{cases}$$

1. Montrer que $\max(x,y) = \dfrac{1}{2}(x+y+|x-y|)$.
2. Montrer que $\min(x,y) = \dfrac{1}{2}(x+y-|x-y|)$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $x^+ = \max(x,0)$ et $x^- = -\min(x,0)$.
   Montrer que $x^+ \geqslant 0, x^- \geqslant 0, x = x^+ - x^-$ et $|x| = x^+ + x^-$.

Exercice 3. Déterminer l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ satisfaisant l'équation ou les inégalités suivantes :

1. $|x| = |y|$,
2. $|x| + |y| = 1$,
3. $|x| - |y| = 2$,
4. $|xy| = 2$,
5. $|x| \leqslant |y|$,
6. $|x| + |y| \leqslant 1$,
7. $|x| - |y| \leqslant 2$,
8. $|xy| \geqslant 2$.

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $x < |x-1|$,
2. $x < -|x-1|$,
3. $x^2 < |x-1|$,
4. $x^2 < -|x-1|$,
5. $x^2 < |x - \frac{1}{4}|$,
6. $|x-5| < |x-1|$,
7. $1 < |x-2| \leqslant 3$,
8. $|x+2|\,|x-2| > 4$,
9. $|x-1| < |x|$,
10. $|x| + |x+1| < 2$.
11. $\max\{|x^2-2|, |x-3|\} \leqslant 1$.
12. $|x-1| + |x+1| \geqslant 1$.

Exercice 5. Représenter le graphe de l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $x \mapsto |x+1| - |x| + |x-1|$.

Exercice 6. Prouver que l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = |x|(1+|x|)^{-1}$, est sous-additive, c'est-à-dire que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$.

Exercice 7. Pour chacune des parties suivantes de $\mathbb{R}$, déterminer si elle est majorée, minorée et, le cas échéant, calculer ses bornes inférieure et supérieure dans $(\mathbb{R}, \leqslant)$.

1. $[-1,1]$
2. $]-1,1] \cup \{2\}$
3. $\mathbb{N}$
4. $\mathbb{Z}$
5. $\mathbb{Q} \cap [-1,1]$
6. $\mathbb{Q} \cap [0,1]$
7. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left\{\frac{1}{n}\right\}$
8. $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}^*} \left\{\frac{1}{n}\right\}$
9. $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left\{\frac{1}{1+n^2}\right\}$
10. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left\{3 + \frac{2}{n}\right\}$
11. $\bigcup_{n\geqslant 2} \left\{(-1)^n \frac{n+1}{n-1}\right\}$
12. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{\frac{n^2+1}{n+1}\right\}$
13. $\bigcup_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2,\ m>n} \left\{\frac{m}{n}\right\}$
14. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x^3 \geqslant 3\right\}$
15. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x|x| < x^2\right\}$
16. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists t \in \mathbb{R} \quad (x = \frac{t+1}{t^2+1}) \wedge (t \in]-2,5[) \right\}$
17. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists t \in \mathbb{R} \quad x = \frac{t}{t^2+1}\right\}$
18. $\{x \in \mathbb{R} \mid \exists t \in \mathbb{R} \quad x = \sin(t)\}$
19. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists t \in \mathbb{R} \quad x = t^2\right\}$
20. $\left\{x \in \mathbb{R}^* \mid \frac{1}{x} \geqslant -3\right\}$
21. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists (s,t) \in \mathbb{R}^2 \quad (x = st) \wedge (|s| + |t| \leqslant 1) \right\}$
22. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists (s,t) \in \mathbb{R}^2 \quad (x = st) \wedge (s^2 + t^2 \leqslant 1) \right\}$.

Exercice 8. Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides majorées. On note $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ (resp. A.B) l'image de $\mathrm{A}\times\mathrm{B}$ par l'addition (resp. la multiplication) : $\mathrm{A}+\mathrm{B} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists (a,b) \in \mathrm{A}\times\mathrm{B} \ \ x = a+b\}$ et $\mathrm{AB} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists (a,b) \in \mathrm{A}\times\mathrm{B} \ \ x = ab\}$.

1. Montrer que $\sup(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) = \max\{\sup\mathrm{A}, \sup\mathrm{B}\}$ et que, si $\mathrm{A}\cap\mathrm{B} \neq \emptyset$, $\sup(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) \leqslant \min\{\sup\mathrm{A}, \sup\mathrm{B}\}$, cette dernière inégalité pouvant être stricte.

2. Montrer que $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.
3. Montrer que $(\sup A)(\sup B) = \sup(AB)$ si $A \subseteq \mathbb{R}_+$ et $B \subseteq \mathbb{R}_+$.
4. Déterminer des parties A, B de $\mathbb{R}$ pour lesquelles $(\sup A)(\sup B) < \sup(AB)$.

Exercice 9. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et bornée. Soit $B = \{|x-y| | (x,y) \in A^2\}$.
Montrer que $\sup(B) = \sup(A) - \inf(A)$.

Exercice 10. Résoudre l'équation $\lfloor 2x-1 \rfloor = \lfloor x-4 \rfloor$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 11.
1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\lfloor x+k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$.
2. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \in \{0,1\}$.
3. Montrer que pour tout $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$, $\left\lfloor \frac{n+m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-m+1}{2} \right\rfloor = n$.
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $\left\lfloor \frac{x+m}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor + m}{n} \right\rfloor$ et $\left\lfloor \frac{1}{n} \lfloor nx \rfloor \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Exercice 12. On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ avec $x < y$, $A \cap]x,y[\neq \emptyset$.

1. Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ avec $x < y$. Soit $q \in \mathbb{R}$ tel que $q > \frac{1}{y-x}$.
   (a) Soit $m = \lfloor qx \rfloor$. Montrer que $x < \frac{m+1}{q} < y$.
   (b) En déduire que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 13. Décrire chacune des parties de $\mathbb{R}$ suivantes à l'aide d'intervalles réels :

1. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 \geqslant 0\}$,
2. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x < 2\}$,
3. $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ et } x^2 + x - 6 < 0\}$,
4. $\{x \in \mathbb{R} \mid x < x^2 - 12 < 4x\}$,
5. $\{x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \mid \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \in \mathbb{R}\}$,
6. $\{x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\} \mid \frac{x-2}{x+3} < 0\}$,
7. $\{x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\} \mid \frac{2x+1}{x+2} < 1\}$,
8. $\{x \in \mathbb{R} \mid (2x+1)^6(x-1) \geqslant 0\}$.
9. $\{x \in \mathbb{R} \mid (x+2)^3(x-3)^7 \geqslant 0\}$.

Exercice 14. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes de deux équations suivants :

1.
$$\begin{cases} x+y=-5 \\ xy=6 \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} x+y=1 \\ xy=-1 \end{cases}$$
3.
$$\begin{cases} x+y=m \\ xy=1 \end{cases} \quad \text{(Discuter selon les valeurs de } m.\text{)}$$

Exercice 15. Soit m un paramètre réel. Résoudre l'équation suivante d'inconnue x réelle :

$$e^x + me^{-x} - m - 1 = 0.$$

Exercice 16. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue x réelle :

1.
$$\sqrt{x+7} = 5 - x.$$
2.
$$\sqrt{-2x+4} - \sqrt{x^2-3} = 0.$$
3.
$$x + \sqrt{2x+1} = 1.$$