3 Méthodes de calcul

3.1 Symbole Σ

3.1.1 Définition et premiers exemples

Définition 1

Soit $n \in \mathbb{N}$, soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ des nombres réels. On note

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

la somme des réels a_k d'indice $k \in [\![0, n]\!]$.
Plus généralement si $(i, j) \in ([\![0, n]\!])^2$ avec $i \leq j$, on note

$$\sum_{k=i}^{j} a_k = a_i + a_{i+1} + \cdots + a_{j-1} + a_j.$$

La variable k s'appelle l'indice de la somme.
Par convention, une somme vide vaut 0.

Remarque 1. On peut également noter $\displaystyle\sum_{i \leq k \leq j} a_k$ pour $\displaystyle\sum_{k=i}^{j} a_k$.

Exemple 1. • $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} k = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$. Plus généralement, on a déjà montré que

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

• $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30.$

Remarque 2. • Dans le cas où $i = j \in [\![0, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=i}^{j} a_k = \sum_{k=i}^{i} a_k = a_i$.

• Dans le cas où $i > j$, on a $\sum_{k=i}^{j} a_k = 0$: en effet, la somme est vide puisqu'on somme sur les indices $k \in [\![i, j]\!] = \{n \in \mathbb{N} | i \leq j \leq n\} = \emptyset$.
• L'indice de la somme est une variable dite muette : ceci signifie qu'on peut la remplacer par n'importe quelle lettre. En effet, les expressions $\sum_{k=0}^{n} a_k$ et $\sum_{j=0}^{n} a_j$ sont égales puisqu'elles valent toutes deux $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$, c'est à dire la somme des réels a_i dont l'indice i parcourt $[\![0, n]\!]$.

Proposition 1: Relation de Chasles

Soient $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leq n$. Soient $(a_p, \dots, a_n)$ des nombres réels.
Alors pour tout $i \in [\![p, n]\!]$, on a

$$\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{k=p}^{i} a_k + \sum_{k=i+1}^{n} a_k.$$

Démonstration. En effet,

$$\sum_{k=p}^{i} a_k + \sum_{k=i+1}^{n} a_k = (a_p + \cdots + a_i) + (a_{i+1} + \cdots + a_n) = a_p + \cdots + a_n = \sum_{k=p}^{n} a_k.$$

■

Corollaire 1: Nombre de termes

Soient $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leq n$.
Alors

$$\sum_{k=p}^{n} 1 = n - p + 1.$$

Démonstration. Soit p un entier naturel fixé.

Montrons par récurrence que pour tout $n \geq p$, $\sum_{k=p}^{n} 1 = n - p + 1$.

Initialisation : Pour $n = p$, on a

$$\sum_{k=p}^{p} 1 = 1 = p - p + 1,$$

ce qui prouve la formule au rang $n = p$.
Hérédité : Soit $n \geq p$ fixé.

On suppose que la propriété est vraie au rang n, i.e. $\sum_{k=p}^{n} 1 = n - p + 1$.

Montrons la formule au rang $n + 1$, à savoir $\sum_{k=p}^{n+1} 1 = n + 1 - p + 1 = n - p + 2$.

D'après la relation de Chasles puis l'hypothèse de récurrence, on a

$$\sum_{k=p}^{n+1} 1 = \sum_{k=p}^{n} 1 + 1 = (n - p + 1) + 1 = n - p + 2,$$

ce qui prouve la formule au rang $n + 1$ et achève la récurrence. ■

Remarque 3. • Moralement, ce résultat se comprend bien ; en effet, si $p \in [\![2, n]\!]$ (de telle sorte que $p-1 \in [\![1, n]\!]$), on peut utiliser la relation de Chasles et on a

$$\sum_{k=p}^{n} 1 = \sum_{k=1}^{n} 1 - \sum_{k=1}^{p-1} 1.$$

Or, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1 = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ fois}} = n$. De même, $\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} 1 = p-1$.

Ainsi,

$$\sum_{k=p}^{n} 1 = n - (p-1) = n - p + 1.$$

• Ce résultat donne le nombre d'entiers dans $[\![p, n]\!]$ (si $p \leq n$) : il y en a $n - p + 1$.

En effet, on remarque qu'il y a bien $n - 1 + 1 = n$ entiers dans $[\![1, n]\!]$ et $n - 0 + 1 = n + 1$ entiers dans $[\![0, n]\!]$.

3.1.2 Propriétés

Linéarité

Proposition 2: Linéarité de la somme

Soient $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leq n$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soient $(a_k)_{p \leq k \leq n}$ et $(b_k)_{p \leq k \leq n}$ des réels. Alors

$$\sum_{k=p}^{n} (\lambda a_k + b_k) = \lambda \sum_{k=p}^{n} a_k + \sum_{k=p}^{n} b_k.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{n} (\lambda a_k + b_k) &= (\lambda a_p + b_p) + (\lambda a_{p+1} + b_{p+1}) + \cdots + (\lambda a_n + b_n) \\
&= \lambda (a_p + a_{p+1} + \cdots + a_n) + (b_p + b_{p+1} + \cdots + b_n) \\
&= \lambda \sum_{k=p}^{n} a_k + \sum_{k=p}^{n} b_k.
\end{aligned}$$

■

Exemple 2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} (3k+2) = 3 \sum_{k=0}^{n} k + 2 \sum_{k=0}^{n} 1 = 3 \frac{n(n+1)}{2} + 2(n+1) = \frac{(n+1)(3n+4)}{2}.$$

Changements d'indice

Proposition 3: Changements d'indice

Soit $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leq n$. Soit $a_p, \dots, a_n$ des nombres réels.

On considère la somme $S = \sum_{k=p}^{n} a_k$. Soit $m \in \mathbb{Z}$.

1. (Translation)
   On pose le changement d'indice $i = k + m$. Alors on a l'égalité
$$S = \sum_{i=p+m}^{n+m} a_{i-m}.$$
2. (Symétrie par rapport à $\frac{m}{2}$)
   On pose le changement d'indice $i = m - k$. Alors on a l'égalité
$$S = \sum_{i=m-n}^{m-p} a_{m-i}.$$

Démonstration.

1. On a
$$\sum_{i=p+m}^{n+m} a_{i-m} = a_{p+m-m} + a_{p+m+1-m} + \cdots + a_{n+m-m} = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_n = S.$$
2. On a
$$\sum_{i=m-n}^{m-p} a_{m-i} = a_{m-(m-n)} + a_{m-(m-n+1)} + \cdots + a_{m-(m-p)} = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_p = S.$$

■

Exemple 3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- En effectuant le changement d'indice $i = k + 2$, on a
$$\sum_{k=0}^{n}(k+2) = \sum_{i=2}^{n+2} i = \left(\sum_{i=1}^{n+2} i\right) - 1 = \frac{(n+2)(n+3)}{2} - 1 = \frac{(n+1)(n+4)}{2}.$$
- En effectuant le changement d'indice $i = n - k$, on a
$$\sum_{k=0}^{n}(n-k) = \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Télescopage

Proposition 4: Télescopage

Soient $(p,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leq n$. Soient $a_p, \ldots, a_n$ des nombres réels. On a les formules suivantes :

1. $$\sum_{k=p}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = a_n - a_p;$$

2. $$\sum_{k=p}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) = a_p - a_n.$$

Remarque 4. En développant ces sommes, on voit que les termes se simplifient les uns les autres sauf les termes extrêmes :

$$\sum_{k=p}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = (a_{p+1} - a_p) + (a_{p+2} - a_{p+1}) + \cdots + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1}) = a_n - a_p$$

et

$$\sum_{k=p}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) = (a_p - a_{p+1}) + (a_{p+1} - a_{p+2}) + \cdots + (a_{n-2} - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_n) = a_p - a_n.$$

Néanmoins, prouvons ces formules rigoureusement.

Démonstration.

1. Par linéarité de la somme, on a
$$\sum_{k=p}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=p}^{n-1} a_{k+1} - \sum_{k=p}^{n-1} a_k.$$
En faisant le changement d'indice $i = k+1$ dans la première somme, on obtient
$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) &= \sum_{i=p+1}^{n} a_i - \sum_{k=p}^{n-1} a_k. \\
&= \sum_{k=p+1}^{n} a_k - \sum_{k=p}^{n-1} a_k \\
&= \left(\sum_{k=p+1}^{n-1} a_k \right) + a_n - \left(\sum_{k=p+1}^{n-1} a_k \right) - a_p \\
&= a_n - a_p.
\end{aligned}$$

2. On a $\sum_{k=p}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=p}^{n-1} -(a_{k+1} - a_k) = -\sum_{k=p}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)$ par linéarité de la somme donc le résultat découle du calcul ci-dessus.

■

Exemple 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

3.1.3 Quelques sommes patrimoniales

Somme de termes consécutifs d'une progression géométrique

Proposition 5: Somme de termes consécutifs d'une progression géométrique

Soit $q \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Alors

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

Démonstration. • Si $q = 1$, on a déjà vu que $\sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$.

• Supposons que $q \neq 1$. Alors par linéarité de la somme, on a

$$\begin{aligned} (1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k &= \sum_{k=0}^{n}(q^k - q^{k+1}) \\ &= q^0 - q^{n+1} \quad \text{(Télescopage)} \\ &= 1 - q^{n+1}. \end{aligned}$$

Puisque $q \neq 1$, alors $1 - q \neq 0$. On peut donc diviser par $(1-q)$ et on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

■

Corollaire 2

Soit $q \in \mathbb{R}$. Soient $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leq n$.
Alors

$$\sum_{k=p}^{n} q^k = \begin{cases} q^p \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n-p+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

Démonstration. • Si $q = 1$, on a déjà vu que $\sum_{k=p}^{n} 1 = n-p+1$.

• Supposons que $q \neq 1$. En utilisant un changement d'indice et la formule précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^{n} q^k &= q^p \sum_{k=p}^{n} q^{k-p} \\ &= q^p \sum_{i=0}^{n-p} q^i \quad (i = k-p) \\ &= q^p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}. \end{aligned}$$

■

Remarque 5. Cette formule peut se retenir sous la forme suivante si $q \neq 1$:

$$\sum_{k=p}^{n} q^k = (\text{premier terme}) \times \frac{1-q^{(\text{nombre de termes})}}{1-q}.$$

Exemple 5.

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{1024}=\sum_{k=0}^{10}\left(-\frac{1}{2}\right)^k=\frac{1-(-\frac{1}{2})^{11}}{1+\frac{1}{2}}=2\frac{1+\frac{1}{2048}}{3}=\frac{2049}{3072}=\frac{683}{1024}.$$

Sommes d'entiers, de carrés, de cubes consécutifs

Proposition 6: Somme d'entiers consécutifs

Soient $(p,n)\in\mathbb{N}^2$ avec $p\leq n$.
Alors
$$\sum_{k=p}^{n}k=\underbrace{(n-p+1)}_{\text{nombre de termes}}\times\underbrace{\frac{p+n}{2}}_{\substack{\text{moyenne des}\\\text{termes}\\\text{extrêmes}}}.$$

En particulier, on retrouve
$$\sum_{k=0}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Démonstration. Nous allons utiliser la formule $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$ déjà montrée par récurrence.

D'après la relation de Chasles, on a donc la formule suivante (remarquons qu'elle est vraie pour tout $p\in\mathbb{N}$, même $p=0$ ou $p=1$).

$$\sum_{k=p}^{n}k=\sum_{k=0}^{n}k-\sum_{k=0}^{p-1}k=\frac{n(n+1)}{2}-\frac{(p-1)p}{2}=\frac{(n-p+1)(n+p)}{2}.$$

■

Remarque 6. On peut aussi prouver ce résultat sans passer par une récurrence. En effet, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2-k^2=\sum_{k=1}^{n}(2k+1)\quad&\Leftrightarrow\quad(n+1)^2-1=2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1\\&\Leftrightarrow\quad n^2+2n=2\sum_{k=1}^{n}k+n\\&\Leftrightarrow\quad\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}.\end{aligned}$$

Proposition 7: Somme des premiers carrés

Soit $n\in\mathbb{N}$. On a
$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Démonstration. Soit $n\in\mathbb{N}$.
Pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$.

En sommant cette égalité pour $k \in [\![1, n]\!]$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 - k^3 = \sum_{k=1}^{n}(3k^2+3k+1) \quad &\Leftrightarrow \quad (n+1)^3 - 1 = 3\sum_{k=1}^{n}k^2 + 3\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1 \\
&\Leftrightarrow \quad n^3+3n^2+3n = 3\sum_{k=1}^{n}k^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + n \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{1}{6}\left(2n^3+3n^2+n\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{1}{6}\left(n(2n^2+3n+1)\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{1}{6}\left(n(n+1)(2n+1)\right).
\end{aligned}$$

■

Remarque 7. Si on connaît le résultat à l'avance, on peut évidemment le prouver facilement par récurrence. L'avantage de la méthode ci-dessus est qu'il n'est pas nécessaire de connaître le résultat à l'avance pour l'établir.

3.1.4 Sommes doubles

Définition 2: Sommes doubles

Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Soit $(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ une famille de réels doublement indexée, c'est à dire les np nombres

$$a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,p}, a_{2,1}, a_{2,2}, \dots, a_{2,p}, \dots, a_{n,1}, a_{n,2}, \dots, a_{n,p}.$$

On note $\displaystyle\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} a_{i,j}$ la somme de tous ces nombres, i.e.

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} a_{i,j} = a_{1,1}+a_{1,2}+\cdots+a_{1,p}+a_{2,1}+a_{2,2}+\cdots+a_{2,p}+\cdots+a_{n,1}+a_{n,2}+\cdots+a_{n,p}.$$

Si $n = p$, on note également $\displaystyle\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}} a_{i,j} = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}$.

Exemple 6. • $\displaystyle\sum_{\substack{1\leq i\leq 2\\1\leq j\leq 3}} 1 = \underbrace{(1+1+1)}_{i=1} + \underbrace{(1+1+1)}_{i=2} = 6.$

• $\displaystyle\sum_{\substack{1\leq i\leq 2\\1\leq j\leq 4}} (i+j) = (1+1)+(1+2)+(1+3)+(1+4)+(2+1)+(2+2)+(2+3)+(2+4) = 32.$

Remarque 8. Il faut imaginer les np réels $(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ représentés dans un tableau

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$\dots$	$a_{1,p}$
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$\dots$	$a_{2,p}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	$\dots$	$a_{n,p}$

Si on veut calculer $\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} a_{i,j}$, on peut procéder des deux façons suivantes :

- Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on calcule le total des cases en ligne i, qui est $\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}$ puis on fait la somme des totaux par ligne, c'est à dire $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\right)$.
- Pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, on calcule le total des cases en colonne j, qui est $\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$ puis on fait la somme des totaux par colonne, c'est à dire $\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right)$.

Dans les deux cas, on aura calculé la somme souhaitée. On a donc montré la proposition suivante :

Proposition 8: Inversion de sommes finies

Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Soit $(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ une famille de réels doublement indexée.
Alors

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right).$$

Remarque 9. Ce résultat signifie que pour calculer une somme double finie, on peut intervertir les symboles somme, c'est à dire qu'on peut sommer sur un indice puis sur l'autre dans l'ordre que l'on préfère.

Exemple 7. Reprenons l'exemple vu ci-dessus de $\sum_{\substack{1\leq i\leq 2\\1\leq j\leq 4}} (i+j)$. On peut aller plus rapidement sans être obligé de développer tous les termes de la somme :

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{1\leq i\leq 2\\1\leq j\leq 4}} (i+j) &= \sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{4}(i+j)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{4} i + \sum_{j=1}^{4} j\right)\\
&= \sum_{i=1}^{2}\left(4i + \frac{4\times 5}{2}\right)\\
&= 4\sum_{i=1}^{2} i + 10\sum_{i=1}^{2} 1\\
&= 4\times 3 + 20\\
&= 32.
\end{aligned}$$

Dans le cas particulier où $a_{i,j} = a_i b_j$, on a un résultat encore plus simple :

Proposition 9: Séparation des variables

Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Soient $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(b_j)_{1\leq j\leq p}$ deux familles de réels.
Alors
$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} a_ib_j = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_ib_j\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{p} b_j\right).$$

Démonstration. La première égalité provient de la proposition précédente appliquée à la famille $(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} = (a_ib_j)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$.

Par linéarité, puisque a_i ne dépend pas de j, on peut le sortir de la somme en j et on obtient :
$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_ib_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(a_i\sum_{j=1}^{p} b_j\right).$$

En utilisant cette fois la linéarité par rapport à la somme en i, puisque $\sum_{j=1}^{p} b_j$ est une constante indépendante de l'indice de sommation i, on peut le sortir de la somme et on obtient
$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i\sum_{j=1}^{p} b_j\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{p} b_j\right),$$
qui est le résultat voulu. ■

Exemple 8. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Alors
$$\sum_{1\leq i,j\leq n} ij = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} j\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Enfin, signalons un dernier cas de somme double.

Définition 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une famille de réels doublement indexée.
On note $\sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j}$ la somme de tous les termes $a_{i,j}$ dont les indices vérifient $1 \leq i \leq j \leq n$.

Proposition 10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une famille de réels doublement indexée.
Alors
$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}\right).$$

Démonstration. Représentons dans un tableau les réels $a_{i,j}$ vérifiant $1 \leq i \leq j \leq n$. Cette condition signifie que l'indice de colonne est plus grand que l'indice de ligne. Si on reprend le tableau précédent, on ne conserve que les termes situés dans la partie triangulaire supérieure du tableau, i.e. les termes situés au-dessus de la diagonale, diagonale comprise :

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$\dots$	$a_{1,n}$
	$a_{2,2}$	$\dots$	$a_{2,n}$
		$\ddots$	$\vdots$
			$a_{n,n}$

Comme précédemment, on va calculer $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j}$ de deux façons différentes :

- Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on calcule le total des cases en ligne i, qui est $\displaystyle\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}$ puis on fait la somme des totaux par ligne, c'est à dire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}\right)$.

- Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on calcule le total des cases en colonne j, qui est $\displaystyle\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}$ puis on fait la somme des totaux par colonne, c'est à dire $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}\right)$.

Ces deux sommes étant égales à $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j}$, on a bien montré l'égalité attendue. ■

Exemple 9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i\leq j\leq 4}(i+j) &= \sum_{i=1}^{4}\left(\sum_{j=i}^{4}(i+j)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{4}\left((4-i+1)i+\sum_{j=i}^{4} j\right)\\
&= \sum_{i=1}^{4}\left((5-i)i+(5-i)\frac{(4+i)}{2}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{4}\left(-\frac{3}{2}i^2+\frac{11}{2}i+10\right)\\
&= -\frac{3}{2}\sum_{i=1}^{4} i^2+\frac{11}{2}\sum_{i=1}^{4} i+40\\
&= -\frac{3}{2}\frac{4\times 5\times 9}{6}+\frac{11}{2}\frac{4\times 5}{2}+40\\
&= -45+55+40\\
&= 50.
\end{aligned}$$

3.2 Symbole $\prod$

3.2.1 Définition

Définition 4

Soit $n \in \mathbb{N}$, soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ des nombres réels. On note

$$\prod_{k=0}^{n} a_k = a_0 \times a_1 \times \cdots \times a_n$$

le produit des réels a_k d'indice $k \in [\![0, n]\!]$. Plus généralement si $(i, j) \in ([\![0, n]\!])^2$ avec $i \leq j$, on note

$$\prod_{k=i}^{j} a_k = a_i \times a_{i+1} \times \cdots \times a_{j-1} \times a_j.$$

La variable k s'appelle l'indice du produit
Par convention, un produit vide vaut 1.

Remarque 10. On peut également noter $\displaystyle\prod_{i \leq k \leq j} a_k$ pour $\displaystyle\prod_{k=i}^{j} a_k$.

Exemple 10. • $\displaystyle\prod_{k=1}^{4} k = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$.

• Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a = a^n$; si $p \leq n$, $\displaystyle\prod_{k=p}^{n} a = a^{n-p+1}$.

Enfin,

$$\prod_{k=1}^{n} a^k = a^{\sum_{k=1}^{n} k} = a^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Remarque 11. • Dans le cas où $i = j \in [\![0, n]\!]$, $\displaystyle\prod_{k=i}^{j} a_k = \prod_{k=i}^{i} a_k = a_i$.

• Dans le cas où $i > j$, on a $\displaystyle\prod_{k=i}^{j} a_k = 1$: en effet, le produit est vide puisqu'il porte sur les indices $k \in [\![i, j]\!] = \{n \in \mathbb{N} | i \leq j \leq n\} = \emptyset$.

• L'indice d'un produit est une variable dite muette : ceci signifie qu'on peut la remplacer par n'importe quelle lettre. En effet, les expressions $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} a_k$ et $\displaystyle\prod_{j=0}^{n} a_j$ sont égales puisqu'elles valent toutes deux $a_0 \times a_1 \times \cdots \times a_n$, c'est à dire le produit des réels a_i dont l'indice i parcourt $[\![0, n]\!]$.

Proposition 11: Relation de Chasles

Soient $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leq n$. Soient $(a_p, \dots, a_n)$ des nombres réels.
Alors pour tout $i \in [\![p, n]\!]$, on a

$$\prod_{k=p}^{n} a_k = \prod_{k=p}^{i} a_k \times \prod_{k=i+1}^{n} a_k.$$

Démonstration. En effet,

$$\prod_{k=p}^{i} a_k \times \prod_{k=i+1}^{n} a_k = (a_p \times \cdots \times a_i) \times (a_{i+1} \times \cdots \times a_n) = a_p \times \cdots \times a_n = \prod_{k=p}^{n} a_k.$$

■

3.2.2 Propriétés

Proposition 12

Soient $(p,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leq n$. Soient $(a_k)_{p\leq k\leq n}$ et $(b_k)_{p\leq k\leq n}$ des familles de nombres réels avec pour tout $p \leq k \leq n, b_k \neq 0$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a les propriétés suivantes :

$$\prod_{k=p}^{n}(a_k \times b_k) = \left(\prod_{k=p}^{n} a_k\right)\left(\prod_{k=p}^{n} b_k\right) \; ; \quad \prod_{k=p}^{n}\left(\frac{a_k}{b_k}\right) = \frac{\prod_{k=p}^{n} a_k}{\prod_{k=p}^{n} b_k};$$

$$\prod_{k=p}^{n} \lambda a_k = \lambda^{n-p+1}\prod_{k=p}^{n} a_k; \quad \forall m \in \mathbb{Z}, \prod_{k=p}^{n}(a_k^m) = \left(\prod_{k=p}^{n} a_k\right)^m.$$

Démonstration. Toutes ces propriétés découlent des propriétés de la multiplication et des puissances revues dans le chapitre Nombres réels. ■

Enfin, le symbole $\prod$ admet des propriétés similaires au symbole $\sum$ quant aux changements d'indice et au télescopage.

Proposition 13: Changements d'indice

Soit $(p,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leq n$. Soit $a_p, \ldots, a_n$ des nombres réels.

On considère le produit $P = \prod_{k=p}^{n} a_k$. Soit $m \in \mathbb{Z}$.

1. (Translation)
   On pose le changement d'indice $i = k + m$. Alors on a l'égalité

$$P = \prod_{i=p+m}^{n+m} a_{i-m}.$$

2. (Symétrie par rapport à $\frac{m}{2}$)
   On pose le changement d'indice $i = m - k$. Alors on a l'égalité

$$P = \prod_{i=m-n}^{m-p} a_{m-i}.$$

Démonstration. Il suffit d'adapter mutatis mutandis la preuve pour la somme. ■

Proposition 14: Télescopage

Soit $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leq n$. Soit $a_p, \ldots, a_n$ des nombres réels non nuls. On a les formules suivantes :

1. $$\prod_{k=p}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_p};$$

2. $$\prod_{k=p}^{n-1} \frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{a_p}{a_n}.$$

Remarque 12. En développant ces produits, on voit que les termes se simplifient les uns les autres sauf les termes extrêmes :

$$\prod_{k=p}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{p+1}}{a_p} \times \frac{a_{p+2}}{a_{p+1}} \times \cdots \times \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \times \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_n}{a_p};$$

$$\prod_{k=p}^{n-1} \frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{a_p}{a_{p+1}} \times \frac{a_{p+1}}{a_{p+2}} \times \cdots \times \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} \times \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_p}{a_n}.$$

Néanmoins, nous allons donner une autre preuve utilisant les changements d'indice.

Démonstration.

1. $$\begin{aligned} \prod_{k=p}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} &= \frac{\prod_{k=p}^{n-1} a_{k+1}}{\prod_{k=p}^{n-1} a_k} \\ &= \frac{\prod_{j=p+1}^{n} a_j}{\prod_{k=p}^{n-1} a_k} \quad (j = k+1) \\ &= \frac{a_n \prod_{k=p+1}^{n-1} a_k}{a_p \prod_{k=p+1}^{n-1} a_k} \\ &= \frac{a_n}{a_p}. \end{aligned}$$

2. Le résultat découle du premier calcul puisque $\displaystyle\prod_{k=p}^{n-1} \frac{a_k}{a_{k+1}}$ est l'inverse de $\displaystyle\prod_{k=p}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k}$.

■

Exemple 11. Soit $n \geq 2$.

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{k^2} = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \left(\prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k}\right)\left(\prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k}\right) = \frac{1}{n}\frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}.$$

3.2.3 Factorielle

Définition 5: Factorielle

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On défininit le nombre factorielle n, noté $n!$, par

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k.$$

Remarque 13. • Si $n = 0$, le produit est vide donc par convention $0! = 1$.
• Si $n \geq 1$, on a donc $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n$.

Exemple 12. Il est bon de connaître par cœur les exemples suivants :

$$0! = 1; 1! = 1; 2! = 2; 3! = 6; 4! = 24; 5! = 120; 6! = 720.$$

Enfin, concluons par la propriété essentielle et simple vérifiée par la factorielle :

Proposition 15

Pour tout $n \in \mathbb{N}, (n+1)! = (n+1) \times n!$.

Démonstration. En effet,

$$(n+1)! = \prod_{k=1}^{n+1} k = (n+1) \prod_{k=1}^{n} k = (n+1) \times n!.$$

■

Remarque 14. En Python, on peut définir la fonction factorielle comme suit :

```
def factorielle(n):
    P=1
    for k in range(1,n+1):
        P=P*k
    return(P)
```

ou

```
def factorielle_2(n):
    if n==0:
        return(1)
    else:
        return (n*factorielle_2(n-1))
```