Corrigé de la liste d'exercices n°2 **Nombres réels**

Exercice 1

Soient x et y deux réels avec $0 < x \leq y$.
Tout d'abord, on a $m = \dfrac{x+y}{2} \leq \dfrac{y+y}{2} = y$.
En appliquant ceci à la moyenne arithmétique de $\dfrac{1}{x}$ et $\dot{f}rac1y$, on a $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right) \leqslant \dfrac{1}{x}$ (car $\dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{1}{y}$). En passant à l'inverse, on obtient $h \geqslant x$.
Montrons que $g \leq m$.
On a

$$m - g = \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{x+y-2\sqrt{xy}}{2} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2} \geq 0$$

d'où $m \geq g$.
Enfin, il reste à montrer que $h \leq g$.
En appliquant l'inégalité $g \leq m$ aux réels strictement positifs $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{y}$, on a

$$0 < \sqrt{\frac{1}{x}\frac{1}{y}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \Leftrightarrow \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\right]^{-1} \leq \sqrt{xy}$$

par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, d'où $h \leq g$.
On peut donc conclure que $x \leq h \leq g \leq m \leq y$.

Exercice 2

1. • Supposons que $x \leqslant y$, i.e. $\max(x,y) = y$. On a alors $x - y \leqslant 0$ d'où

$$\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y-(x-y)) = y = \max(x,y).$$

   • Supposons que $x \geqslant y$, i.e. $\max(x,y) = x$. On a alors $x - y \geqslant 0$ d'où

$$\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y+x-y) = x = \max(x,y).$$

   Dans tous les cas, on a bien $\max(x,y) = \dfrac{1}{2}(x+y+|x-y|)$.

2. On peut appliquer la même méthode qu'en 1 ou bien remarquer que $\min(x,y) = -\max(-x,-y)$ d'où

$$\min(x,y) = -\max(-x,-y) = -\frac{1}{2}(-x-y+|-x-(-y)|) = \frac{1}{2}(x+y-|x-y|).$$

3. Par définition $x^+ = \max(x,0) \geqslant 0$. De même, $\min(x,0) \leqslant 0$ donc $x^- = -\min(x,0) \geqslant 0$.
   D'après les questions précédentes, on a $x^+ = \dfrac{1}{2}(x+|x|)$ et $x^- = -\dfrac{1}{2}(x-|x|) = \dfrac{1}{2}(|x|-x)$ donc $x^+ - x^- = x$ et $x^+ + x^- = |x|$.

Exercice 3

1. $|x| = |y| \Leftrightarrow y = x$ ou $y = -x$.
2. On a $|x| + |y| = 1 \Rightarrow x \in [-1, 1]$ et $y \in [-1, 1]$.
   - Si $x \in [0, 1]$ et $y \in [0, 1]$, alors $|x| + |y| = 1 \Leftrightarrow x + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - x$.
   - Si $x \in [0, 1]$ et $y \in [-1, 0]$, alors $|x| + |y| = 1 \Leftrightarrow x - y = 1 \Leftrightarrow y = x - 1$.
   - Si $x \in [-1, 0]$ et $y \in [0, 1]$, alors $|x| + |y| = 1 \Leftrightarrow -x + y = 1 \Leftrightarrow y = x + 1$.
   - Si $x \in [-1, 0]$ et $y \in [-1, 0]$, alors $|x| + |y| = 1 \Leftrightarrow -x - y = 1 \Leftrightarrow y = -x - 1$.
3. $|x| - |y| = 2 \Rightarrow |x| \geqslant 2$.
   - Si $x \geqslant 2$ et $y \geqslant 0$, alors $|x| - |y| = 2 \Leftrightarrow x - y = 2 \Leftrightarrow y = x - 2$.
   - Si $x \geqslant 2$ et $y \leqslant 0$, alors $|x| - |y| = 2 \Leftrightarrow x + y = 2 \Leftrightarrow y = 2 - x$.
   - Si $x \leqslant -2$ et $y \geqslant 0$, alors $|x| - |y| = 2 \Leftrightarrow -x - y = 2 \Leftrightarrow y = -x - 2$.
   - Si $x \leqslant -2$ et $y \leqslant 0$, alors $|x| - |y| = 2 \Leftrightarrow -x + y = 2 \Leftrightarrow y = x + 2$.
4. Si $|xy| = 2$, nécessairement $(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2$.
   - Si x et y sont de même signe, alors $|xy| = 2 \Leftrightarrow xy = 2 \Leftrightarrow y = \dfrac{2}{x}$.
   - Si x et y sont de signe opposé, alors $|xy| = 2 \Leftrightarrow -xy = 2 \Leftrightarrow y = -\dfrac{2}{x}$.
5. On a $|x| \leqslant |y| \Leftrightarrow -|y| \leqslant x \leqslant |y|$.
6. On a $|x| + |y| \leqslant 1 \Rightarrow x \in [-1, 1]$ et $y \in [-1, 1]$.
   - Si $x \in [0, 1]$ et $y \in [0, 1]$, alors $|x| + |y| \leqslant 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant x + y \leqslant 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant y \leqslant 1 - x$.
   - Si $x \in [0, 1]$ et $y \in [-1, 0]$, alors $|x| + |y| \leqslant 1 \Leftrightarrow x - y \leqslant 1 \Leftrightarrow 0 \geqslant y \geqslant x - 1$.
   - Si $x \in [-1, 0]$ et $y \in [0, 1]$, alors $|x| + |y| \leqslant 1 \Leftrightarrow -x + y \leqslant 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant y \leqslant x + 1$.
   - Si $x \in [-1, 0]$ et $y \in [-1, 0]$, alors $|x| + |y| \leqslant 1 \Leftrightarrow -x - y \leqslant 1 \Leftrightarrow 0 \geqslant y \geqslant -x - 1$.
7. - Si $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0, |x| - |y| \leqslant 2 \Leftrightarrow x - y \leqslant 2 \Leftrightarrow y \geqslant x - 2$
   - Si $x \geqslant 0$ et $y \leqslant 0, |x| - |y| \leqslant 2 \Leftrightarrow x + y \leqslant 2 \Leftrightarrow y \leqslant 2 - x$.
   - Si $x \leqslant 0$ et $y \geqslant 0, |x| - |y| \leqslant 2 \Leftrightarrow -x - y \leqslant 2 \Leftrightarrow y \geqslant -x - 2$.
   - Si $x \leqslant 0$ et $y \leqslant 0, |x| - |y| \leqslant 2 \Leftrightarrow -x + y \leqslant 2 \Leftrightarrow y \leqslant x + 2$.
8. - Si $x = 0$ ou $y = 0$, l'inégalité est vérifiée.

   Supposons dorénavant que $(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2$.
   - Si $x > 0$ et $y > 0$, alors $|xy| \geqslant 2 \Leftrightarrow xy \geqslant 2 \Leftrightarrow y \geqslant \dfrac{2}{x}$.
   - Si $x > 0$ et $y < 0$, alors $|xy| \geqslant 2 \Leftrightarrow -xy \geqslant 2 \Leftrightarrow y \leqslant -\dfrac{2}{x}$ (car $-x < 0$).
   - Si $x < 0$ et $y > 0$, alors $|xy| \geqslant 2 \Leftrightarrow -xy \geqslant 2 \Leftrightarrow y \geqslant -\dfrac{2}{x}$ (car $-x > 0$).
   - Si $x < 0$ et $y < 0$, alors $|xy| \geqslant 2 \Leftrightarrow xy \geqslant 2 \Leftrightarrow y \leqslant \dfrac{2}{x}$ (car $x < 0$).

Exercice 4

1. - Si $x \geqslant 1$, on a $x - 1 \geqslant 0$ d'où
   $$x < |x - 1| \Leftrightarrow x < x - 1 \Leftrightarrow 0 < -1,$$
   ce qui est absurde. Donc il n'y a pas de solution réelle à l'inéquation dans ce cas.
   - Si $x < 1$, on a $x - 1 < 0$ d'où
   $$x < |x - 1| \Leftrightarrow x < 1 - x \Leftrightarrow 2x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}.$$
   Finalement, l'ensemble des solutions de cette inéquation est $]-\infty, \frac{1}{2}[$.

2. • Si $x \geqslant 1$, on a $x-1 \geqslant 0$ d'où
$$x < -|x-1| \Leftrightarrow x < -(x-1) \Leftrightarrow 2x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2},$$
ce qui est absurde car $x \geqslant 1$. Donc il n'y a pas de solution réelle à l'inéquation dans ce cas.
• Si $x < 1$, on a $x-1 < 0$ d'où
$$x < -|x-1| \Leftrightarrow x < -(1-x) \Leftrightarrow x < x-1 \Leftrightarrow 0 < -1,$$
ce qui est absurde.
Il n'y a donc pas de solution réelle à cette inéquation.
3. • Si $x \geqslant 1$, on a
$$x^2 < |x-1| \Leftrightarrow x^2 < x-1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 < 0.$$
Or, ce trinôme du second degré n'a pas de racines sur $\mathbb{R}$ donc il est toujours du signe de son cœfficient dominant, i.e. pour tout $x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 > 0$. L'inéquation n'a donc pas de solution dans le cas où $x \geqslant 1$.
• Si $x < 1$, on a
$$x^2 < |x-1| \Leftrightarrow x^2 < 1-x \Leftrightarrow x^2 + x - 1 < 0.$$
Les racines de ce trinôme du second degré sont $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$ et $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} < 1$ donc l'ensemble des solutions de cette inéquation est $]\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}[$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 \geqslant 0$ et $-|x-1| \leqslant 0$ donc l'inéquation n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$.
5. • Si $x \geqslant \dfrac{1}{4}$, on a
$$x^2 < |x - \frac{1}{4}| \Leftrightarrow x^2 < x - \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} < 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 < 0,$$
ce qui est impossible sur $\mathbb{R}$.
• Si $x < \dfrac{1}{4}$, on a
$$x^2 < |x - \frac{1}{4}| \Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{4} - x \Leftrightarrow x^2 + x - \frac{1}{4} < 0.$$
Les racines de ce trinôme sont $\dfrac{-1-\sqrt{2}}{2} < 0$ et $\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2} < \dfrac{1}{4}$ donc l'ensemble des solutions de cette inéquation est $]\frac{-1-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}[$.
6. On a $|x-5| < |x-1| \Leftrightarrow -|x-1| < x-5 < |x-1|$.
• Si $x \geqslant 1$, cette double inéquation équivaut à $-x+1 < x-5 < x-1 \Leftrightarrow 2x > 6 \Leftrightarrow x > 3$.
• Si $x < 1$, cette double inéquation équivaut à $x-1 < x-5 < 1-x$, qui n'a pas de solution car $-1 < -5$ est absurde.
Finalement, l'ensemble des solutions de cette équation est $]3, +\infty[$.
7. • Si $x \geqslant 2$, on a
$$1 < |x-2| \leqslant 3 \Leftrightarrow 1 < x-2 \leqslant 3 \Leftrightarrow 3 < x \leqslant 5.$$
• Si $x < 2$, on a
$$1 < |x-2| \leqslant 3 \Leftrightarrow 1 < 2-x \leqslant 3 \Leftrightarrow -1 \leqslant x < 1.$$
L'ensemble des solutions est donc $[-1, 1[\cup]3, 5]$.

8. • Si $x \geqslant 2$, on a

$$|x+2||x-2| > 4 \Leftrightarrow (x+2)(x-2) > 4 \Leftrightarrow x^2 - 8 > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt{8}.$$

• Si $-2 \leqslant x < 2$, on a

$$|x+2||x-2| > 4 \Leftrightarrow (x+2)(2-x) > 4 \Leftrightarrow 4 - x^2 > 4 \Leftrightarrow x^2 < 0,$$

ce qui est impossible sur $\mathbb{R}$.
• Si $x < -2$, on a

$$|x+2||x-2| > 4 \Leftrightarrow (-x-2)(2-x) > 4 \Leftrightarrow x^2 - 8 > 0 \Leftrightarrow x < -\sqrt{8}.$$

Finalement, l'ensemble des solutions est $]-\infty, -\sqrt{8}[\cup]\sqrt{8}, +\infty[$.

9. • Si $x \geqslant 1$, on a $|x-1| < |x| \Leftrightarrow x - 1 < x \Leftrightarrow -1 < 0$, ce qui est toujours vrai donc tout $x \in [1, +\infty[$ est solution de l'inéquation.
• Si $0 \leqslant x < 1$, on a $|x-1| < |x| \Leftrightarrow 1 - x < x \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{2}$ donc tout $x \in]\frac{1}{2}, 1[$ est solution de l'inéquation.
• Si $x < 0$, on a $|x-1| < |x| \Leftrightarrow 1 - x < -x \Leftrightarrow 1 < 0$, ce qui est faux.
Finalement, l'ensemble des solutions est $]\frac{1}{2}, +\infty[$.

10. • Si $x \geqslant 0$, on a $|x| + |x+1| < 2 \Leftrightarrow x + x + 1 < 2 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$ donc tout $x \in [0, \frac{1}{2}[$ est solution de l'inéquation.
• Si $-1 \leqslant x < 0$, on a $|x| + |x+1| < 2 \Leftrightarrow -x + x + 1 < 2 \Leftrightarrow 1 < 2$, ce qui est vrai donc tout $x \in [-1, 0[$ est solution de l'inéquation.
• Si $x < -1$, on a $|x| + |x+1| < 2 \Leftrightarrow -x - x - 1 < 2 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{2}$ donc tout $x \in]-\frac{3}{2}, -1[$ est solution de l'inéquation.
Finalement, l'ensemble des solutions est $]-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}[$.

11. On a $\max(|x^2-2|, |x-3|) \leqslant 1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} |x^2-2| & \leqslant & 1 \\ |x-3| & \leqslant & 1. \end{array} \right.$
Résolvons séparément les deux inéquations.
• Résolvons l'inéquation $|x^2-2| \leqslant 1$ pour $x \in \mathbb{R}$.
On a $|x^2-2| \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant x^2 - 2 \leqslant 1 \Leftrightarrow 1 \leqslant x^2 \leqslant 3$.
- Si $x \geqslant 0$, par stricte croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$1 \leqslant x^2 \leqslant 3 \Leftrightarrow 1 \leqslant x \leqslant \sqrt{3}.$$

- Si $x < 0$, par stricte décroissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_-$, on a

$$1 \leqslant x^2 \leqslant 3 \Leftrightarrow -\sqrt{3} \leqslant x \leqslant -1.$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'inéquation $|x^2-2| \leqslant 1$ est $[-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}]$.
• Résolvons l'inéquation $|x-3| \leqslant 1$.
On a $|x-3| \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant x - 3 \leqslant 1 \Leftrightarrow 2 \leqslant x \leqslant 4$ donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $|x-3| \leqslant 1$ est $[2, 4]$.
Finalement, l'ensemble des solutions de l'inéquation $\max(|x^2-2|, |x-3|) \leqslant 1$ est

$$([-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}]) \cap [2, 4] = \emptyset.$$

12. • Si $x \geqslant 1$, on a

$$|x-1|+|x+1| \geqslant 1 \Leftrightarrow x-1+x+1 \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{1}{2},$$

ce qui est vrai pour tout $x \geqslant 1$ donc tout $x \in [1,+\infty[$ est solution de l'inéquation.
• Si $x \in [-1,1[$, on a

$$|x-1|+|x+1| \geqslant 1 \Leftrightarrow 1-x+x+1 \geqslant 1 \Leftrightarrow 2 \geqslant 1,$$

ce qui est vrai donc tout $x \in [-1,1[$ est solution de l'inéquation.
• Si $x < -1$, on a

$$|x-1|+|x+1| \geqslant 1 \Leftrightarrow 1-x-x-1 \geqslant 1 \Leftrightarrow -2x \geqslant 1 \Leftrightarrow x \leqslant -\frac{1}{2},$$

ce qui est vrai pour tout $x < -1$ donc tout $x \in]-\infty,-1[$ est solution de l'inéquation.
Finalement, l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathbb{R}$.

Exercice 5

Soit $f : x \longmapsto |x+1|-|x|+|x-1|$.
• Si $x < -1$, on a $f(x) = -1-x-(-x)+1-x = -x$.
• Si $x \in [-1,0[$, on a $f(x) = x+1-(-x)+1-x = x+2$.
• Si $x \in [0,1[$, on a $f(x) = x+1-x+1-x = -x+2$.
• Si $x \geqslant 1$, on a $f(x) = x+1-x+x-1 = x$.

Exercice 6

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$f(x+y) = \frac{|x+y|}{1+|x+y|} \text{ et } f(x)+f(y) = \frac{|x|}{1+|x|}+\frac{|y|}{1+|y|} = \frac{|x|+|y|+2|xy|}{1+|x|+|y|+|xy|}$$

donc

$$\begin{aligned} f(x)+f(y)-f(x+y) &= \frac{(|x|+|y|+2|xy|)(1+|x+y|)-|x+y|(1+|x|+|y|+|xy|)}{(1+|x+y|)(1+|x|+|y|+|xy|)} \\ &= \frac{|x|+|y|-|x+y|+|xy||x+y|+2|xy|}{(1+|x+y|)(1+|x|+|y|+|xy|)}. \end{aligned}$$

Il est clair que le dénominateur est positif ; $f(x)+f(y)-f(x+y)$ est donc du signe du numérateur.
On a $|xy||x+y|+2|xy| \geqslant 0$. Par ailleurs, d'après l'inégalité triangulaire, $|x|+|y|-|x+y| \geqslant 0$ donc $|x|+|y|-|x+y|+|xy||x+y|+2|xy| \geqslant 0$, ce qui prouve que le numérateur est également positif.
Ainsi, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a bien $f(x)+f(y)-f(x+y) \geqslant 0$, i.e. $f(x+y) \leqslant f(x)+f(y)$.

Exercice 7

1. $\sup([-1,1]) = 1 ; \inf([-1,1]) = -1$.

2. $\sup(]-1,1]\cup\{2\})=2;\inf(]-1,1]\cup\{2\})=-1$.
3. $\mathbb{N}$ n'est pas majoré mais est minoré et $\inf(\mathbb{N})=0$.
4. $\mathbb{Z}$ n'est ni majoré, ni minoré.
5. $\sup(\mathbb{Q}\cap[-1,1])=1;\inf(\mathbb{Q}\cap[-1,1])=-1$.
6. $\sup(\mathbb{Q}\cap[0,1])=1;\inf(\mathbb{Q}\cap[0,1])=0$.
7. $\sup\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\{\frac{1}{n}\}\right)=1;\inf\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\{\frac{1}{n}\}\right)=0$.
8. $\sup\left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}^*}\{\frac{1}{n}\}\right)=1;\inf\left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}^*}\{\frac{1}{n}\}\right)=-1$.
9. $\sup\left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\{\frac{1}{1+n^2}\}\right)=1;\inf\left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\{\frac{1}{1+n^2}\}\right)=0$.
10. $\sup\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\{3+\frac{2}{n}\}\right)=5;\inf\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\{3+\frac{2}{n}\}\right)=3$.
11. On remarque tout d'abord que pour tout $n\geqslant 2, (-1)^n\dfrac{n+1}{n-1}=(-1)^n(1+\frac{2}{n-1})$ et

$$\sup\left(\bigcup_{n\geqslant 2}\left\{(-1)^n\left(1+\frac{2}{n-1}\right)\right\}\right)=3;\inf\left(\bigcup_{n\geqslant 2}\left\{(-1)^n\left(1+\frac{2}{n-1}\right)\right\}\right)=-2.$$

12. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\dfrac{n^2+1}{n+1}\right\}$ n'est pas majoré mais est minoré et $\inf\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\dfrac{n^2+1}{n+1}\right\}\right)=1$.
13. $\bigcup_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2,m>n}\left\{\dfrac{m}{n}\right\}$ n'est pas majoré mais est minoré et $\inf\left(\bigcup_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2,m>n}\left\{\dfrac{m}{n}\right\}\right)=1$.
14. $\{x\in\mathbb{R},x^3\geqslant 3\}=[\sqrt[3]{3},+\infty[$ donc ce n'est pas un ensemble majoré mais c'est un ensemble minoré de borne inférieure $\sqrt[3]{3}$.
15. $\{x\in\mathbb{R},x|x|<x^2\}=\mathbb{R}_-^*$ donc ce n'est pas un ensemble minoré mais c'est un ensemble majoré de borne supérieure 0.
16. Il s'agit d'étudier la fonction $f:t\mapsto\dfrac{t+1}{t^2+1}$ sur $]-2,5[$.
On a pour tout $t\in]-2,5[, f'(t)=\dfrac{t^2+1-2t^2-2t}{(t^2+1)^2}=\dfrac{-t^2-2t+1}{(t^2+1)^2}=-\dfrac{(t+1-\sqrt{2})(t+1+\sqrt{2})}{(t^2+1)^2}$.
Le dénominateur étant toujours positif, $f'(t)$ est du signe du numérateur, i.e. $f'(t)\geqslant 0$ si $t\in]-2,-1+\sqrt{2}]$ et $f'(t)\leqslant 0$ si $t\in[-1+\sqrt{2},5[$ donc f atteint son maximum en $-1+\sqrt{2}$ et celui-ci vaut

$$f(-1+\sqrt{2})=\frac{\sqrt{2}}{2-2\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}},$$

qui est la borne supérieure de l'ensemble étudié.
De plus, $f(-2)=-\dfrac{1}{5}$ et $f(5)=\dfrac{6}{25}$ donc la borne inférieure de l'ensemble étudié est $-\dfrac{1}{5}$.
17. Il s'agit d'étudier la fonction $f:t\longmapsto\dfrac{t}{t^2+1}$ sur $\mathbb{R}$.
On a pour tout $t\in\mathbb{R}, f'(t)=\dfrac{t^2+1-2t^2}{(t^2+1)^2}=\dfrac{1-t^2}{(t^2+1)^2}=\dfrac{(1-t)(1+t)}{(t^2+1)^2}$ donc $f'(t)\geqslant 0$ si $t\in[-1,1]$ et $f'(t)\leqslant 0$ si $t\leqslant -1$ et si $t\geqslant 1$.
Ainsi, f est décroissante sur $]-\infty,-1]$, croissante sur $[-1,1]$ et décroissante sur $[1,+\infty[$.
Par ailleurs, on a $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=\lim\limits_{t\to-\infty}f(t)=0$, $f(-1)=-\dfrac{1}{2}$ et $f(1)=\dfrac{1}{2}$.
Finalement, $\inf\{x\in\mathbb{R}|\exists t\in\mathbb{R},x=\frac{t}{t^2+1}\}=-\frac{1}{2}$ et $\sup\{x\in\mathbb{R}|\exists t\in\mathbb{R},x=\frac{t}{t^2+1}\}=\frac{1}{2}$.

18. On a $\{x \in \mathbb{R} | \exists t \in \mathbb{R}, x = \sin(t)\} = [-1, 1]$ et $\inf([-1, 1]) = -1$ et $\sup([-1, 1]) = 1$.
19. On a $\{x \in \mathbb{R} | \exists t \in \mathbb{R}, x = t^2\} = [0, +\infty[$. Cet ensemble n'est donc pas majoré mais admet 0 pour borne inférieure.
20. On a $\{x \in \mathbb{R}^* | \frac{1}{x} \geqslant -3\} =]-\infty, -\frac{1}{3}] \cup \mathbb{R}_+^*$. Cet ensemble n'est donc ni minoré ni majoré.
21. Si $|s| + |t| \leqslant 1$, on a nécessairement $(s, t) \in [-1, 1]^2$ et $|s| - 1 \leqslant t \leqslant 1 - |s|$.
    - Si $s \geqslant 0$, ceci implique que $s(s-1) \leqslant st \leqslant s(1-s) \Leftrightarrow s^2 - s \leqslant st \leqslant s - s^2 \Rightarrow -\dfrac{1}{4} \leqslant st \leqslant \dfrac{1}{4}$ car $s \mapsto s - s^2$ atteint son maximum sur $[0, 1]$ en $\frac{1}{2}$ et celui-ci vaut $\frac{1}{4}$.
    - Si $s \leqslant 0$, ceci implique que $s(s+1) \leqslant st \leqslant s(-1-s) \Leftrightarrow s^2 + s \leqslant st \leqslant -s - s^2 \Rightarrow -\dfrac{1}{4} \leqslant st \leqslant \dfrac{1}{4}$ car $s \mapsto s + s^2$ atteint son minimum sur $[-1, 0]$ en $-\frac{1}{2}$ et celui-ci vaut $-\frac{1}{4}$.

    Ainsi, $\inf\{st, |s| + |t| \leqslant 1\} = -\dfrac{1}{4}$ et $\sup\{st, |s| + |t| \leqslant 1\} = \dfrac{1}{4}$.
22. On a $s^2 + t^2 \leqslant 1 \Rightarrow |t| \leqslant \sqrt{1 - s^2} \Rightarrow -\sqrt{1 - s^2} \leqslant t \leqslant \sqrt{1 - s^2}$ avec $(s, t) \in [-1, 1]^2$.
    - Si $s \geqslant 0$, on a $-s\sqrt{1 - s^2} \leqslant st \leqslant s\sqrt{1 - s^2} \Rightarrow -\dfrac{1}{2} \leqslant st \leqslant \dfrac{1}{2}$ (maximum de $s \mapsto s\sqrt{1 - s^2}$ atteint en $s = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et vaut $\dfrac{1}{2}$).
    - Si $s \leqslant 0$, on trouve de même que $-\dfrac{1}{2} \leqslant st \leqslant \dfrac{1}{2}$ donc

    $$\inf\{st, s^2 + t^2 \leqslant 1\} = -\frac{1}{2} \text{ et } \sup\{st, s^2 + t^2 \leqslant 1\} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 8

1. • Montrons que $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.

   Supposons que $\sup(A) \geq \sup(B)$ de telle sorte que $\max(\sup(A), \sup(B)) = \sup(A)$. L'autre cas se traite de la même manière.

   Montrons dans ce cas que $\sup(A \cup B) = \sup(A)$.

   Tout d'abord, on a pour tout $x \in A, x \leq \sup(A)$ et pour tout $x \in B, x \leq \sup(B) \leq \sup(A)$ d'où
   $$\forall x \in A \cup B, x \leq \sup(A),$$
   donc $\sup(A)$ est bien un majorant de $A \cup B$.

   Montrons que $\sup(A)$ est le plus petit majorant de $A \cup B$, i.e. montrons que
   $$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A \cup B, \sup(A) - \varepsilon < x \leq \sup(A).$$
   Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de $\sup(A)$, il existe $x \in A$ tel que $\sup(A) - \varepsilon < x \leq \sup(A)$. Or, si $x \in A$, a fortiori, $x \in A \cup B$ donc on a bien la propriété voulue, ce qui assure que $\sup(A \cup B) = \sup(A)$.

   Si on a $\sup(B) \geq \sup(A)$, on montre de même que $\sup(A \cup B) = \sup(B)$.

   • Supposons désormais que $A \cap B \neq \emptyset$. On a alors pour tout $x \in A \cap B, x \leq \sup(A)$ et $x \leq \sup(B)$.

   Ainsi, $A \cap B$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ donc elle admet une borne supérieure $\sup(A \cap B)$. Puisque $\sup(A)$ et $\sup(B)$ sont des majorants de $A \cap B$, on en déduit $\sup(A \cap B) \leq \sup(A)$ et $\sup(A \cap B) \leq \sup(B)$, ce qui prouve bien que
   $$\sup(A \cap B) \leq \min(\sup(A), \sup(B)).$$

Cette inégalité peut être stricte.
Prenons par exemple $A = \{0,1\}$ et $B = \{0,2\}$. Alors $\sup(A) = 1$ et $\sup(B) = 2$.
D'autre part, on a $\sup(A \cap B) = \sup(\{0\}) = 0 < 1 = \min(\sup(A), \sup(B))$.

2. Montrons que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
Soit $(x, y) \in A \times B$. Alors on a $x + y \leq \sup(A) + \sup(B)$ donc $\sup(A) + \sup(B)$ est un majorant de $A + B$. Montrons que c'est le plus petit des majorants de $A + B$.
Soit $\varepsilon > 0$. Par propriété de $\sup(A)$, il existe $x \in A$ tel que $\sup(A) - \dfrac{\varepsilon}{2} < x \leq \sup(A)$.
De même, il existe $y \in B$ tel que $\sup(B) - \dfrac{\varepsilon}{2} < y \leq \sup(B)$.
En additionnant ces deux inégalités, on obtient
$$\sup(A) + \sup(B) - \varepsilon < x + y \leq \sup(A) + \sup(B)$$
avec $x + y \in A + B$. On a donc bien montré que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

3. Supposons que $A \subset \mathbb{R}_+$ et $B \subset \mathbb{R}_+$.
Montrons que dans ce cas $\sup(A)\sup(B) = \sup(AB)$.
Soient $(x, y) \in A \times B$. On a $x \leq \sup(A)$ et $y \leq \sup(B)$. Puisque tous les termes sont positifs, on a
$$xy \leq x \sup(B) \leq \sup(A)\sup(B)$$
donc $\sup(A)\sup(B)$ est un majorant de AB.
Pour montrer que $\sup(AB) = \sup(A)\sup(B)$, il suffit alors de montrer que
$$\forall \varepsilon > 0, \exists (x, y) \in A \times B, \sup(A)\sup(B) - \varepsilon < xy \leq \sup(A)\sup(B).$$
Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $\delta > 0, \exists (x, y) \in A \times B$ tels que $\sup(A) - \delta < x \leq \sup(A)$ et $\sup(B) - \delta < y \leq \sup(B)$. En multipliant ces inégalités, on obtient
$$\sup(A)\sup(B) - \delta(\sup(A) + \sup(B)) \leq \sup(A)\sup(B) - \delta(\sup(A) + \sup(B)) + \delta^2 < xy \leq \sup(A)\sup(B).$$
Si on choisit $\delta = \dfrac{\varepsilon}{\sup(A) + \sup(B) + 1}$, alors $\delta(\sup(A) + \sup(B)) < \varepsilon$, donc
$$\sup(A)\sup(B) - \varepsilon < xy \leq \sup(A)\sup(B).$$
On a donc bien montré que $\sup(AB) = \sup(A)\sup(B)$.

4. Posons $A = \{-1\}$ et $B = \{-1, 0\}$. Alors $AB = \{0, 1\}$ et on a bien
$$\sup(A)\sup(B) = -1 \times 0 = 0 < 1 = \sup(AB).$$

Exercice 9

Tout élément de B est de la forme $x - y$ pour $(x, y) \in A^2$ avec $x \geq y$.
Si $x \in A$, alors $x \leq \sup(A)$ et si $y \in A$, alors $-y \leq -\inf(A)$ donc $x - y \leq \sup(A) - \inf(A)$.
Ainsi, $\sup(A) - \inf(A)$ est un majorant de B. Pour montrer que $\sup(B) = \sup(A) - \inf(A)$, il reste à montrer que c'est le plus petit majorant de B.
Soit m un majorant de B. Alors pour tout $(x, y) \in A^2$, on a
$$x - y \leq |x - y| \leq m$$
d'où $x \leq y + m$.

Fixons $y \in A$. Alors $y+m$ est un majorant de A donc est supérieur au plus petit majorant de A, i.e.

$$\forall y \in A, \sup(A) \leq y+m,$$

i.e. $\sup(A) - m \leq y$ pour tout $y \in A$.
On en déduit que $\sup(A) - m$ est un minorant de A, donc est inférieur au plus grand minorant de A, d'où

$$\sup(A) - m \leq \inf(A)$$

ce qui implique que $\sup(A) - \inf(A) \leq m$.
On a donc montré que $\sup(A) - \inf(A)$ est un majorant de B et est inférieur à tous les majorants de B : c'est donc le plus petit majorant de B, c'est à dire la borne supérieure de B.
On en conclut que $\sup(B) = \sup(A) - \inf(A)$.

Exercice 10

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\lfloor 2x-1 \rfloor = \lfloor x-4 \rfloor$. Soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n = \lfloor x \rfloor$.
• Si $n \leqslant x < n + \frac{1}{2}$, on a $n - 4 \leqslant x - 4 < n - \frac{7}{2} < n - 3$ donc $\lfloor x-4 \rfloor = n-4$.
D'autre part, $n \leqslant x < n+\frac{1}{2} \Rightarrow 2n \leqslant 2x < 2n+1 \Rightarrow 2n-1 \leqslant 2x-1 < 2n$ donc $\lfloor 2x-1 \rfloor = 2n-1$ et $\lfloor 2x-1 \rfloor = \lfloor x-4 \rfloor$ implique $n-4 = 2n-1$ d'où $n = -3$.
Ainsi, dans ce cas, on a $x \in [-3, -\frac{5}{2}[$.
• Si $n + \frac{1}{2} \leqslant x < n+1$, on a $n - 4 < n - \frac{7}{2} \leqslant x - 4 < n - 3$ donc $\lfloor x-4 \rfloor = n-4$.
D'autre part, $n + \frac{1}{2} \leqslant x < n+1 \Rightarrow 2n+1 \leqslant 2x < 2n+2 \Rightarrow 2n \leqslant 2x-1 < 2n+1$ donc $\lfloor 2x-1 \rfloor = 2n$ et $\lfloor 2x-1 \rfloor = \lfloor x-4 \rfloor$ implique $n-4 = 2n$ d'où $n = -4$.
Ainsi, dans ce cas, on a $x \in [-\frac{7}{2}, -3[$.
Finalement, l'ensemble des réels x tels que $\lfloor 2x-1 \rfloor = \lfloor x-4 \rfloor$ est $[-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}[$.
Autre méthode : Par analyse-synthèse.
Analyse : Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\lfloor 2x-1 \rfloor = \lfloor x-4 \rfloor$. Soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n = \lfloor 2x-1 \rfloor = \lfloor x-4 \rfloor$.
Par définition de la partie entière, on a

$$\begin{cases} n \leqslant & 2x-1 & < n+1 \\ n \leqslant & x-4 & < n+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \leqslant & 2x-1 & < n+1 \\ -1-n < & 4-x & \leqslant -n \end{cases}$$

Par somme, on obtient $-1 < x+3 < 1$ d'où $-4 < x < -2$.
Synthèse : - Si $-4 < x < -\frac{7}{2}$, alors $-8 < x-4 < -\frac{15}{2} < -7$ donc $\lfloor x-4 \rfloor = -7$.
D'autre part, si $-4 < x < -\frac{7}{2}$, alors $-8 < 2x < -7$ donc $-9 < 2x-1 < -8$ d'où $\lfloor 2x-1 \rfloor = -9$ et on n'a pas l'égalité dans ce cas-là.
• Si $-\frac{7}{2} \leqslant x < -3$, alors $-8 < -\frac{15}{2} \leqslant x-4 < -7$ d'où $\lfloor x-4 \rfloor = -8$.
D'autre part, si $-\frac{7}{2} \leqslant x < -3$, alors $-7 \leqslant 2x < -6$ donc $-8 \leqslant 2x-1 < -7$ d'où $\lfloor 2x-1 \rfloor = -8 = \lfloor x-4 \rfloor$.
• Si $-3 \leqslant x < -\frac{5}{2}$, alors $-7 \leqslant x-4 < -\frac{13}{2} < -6$ donc $\lfloor x-4 \rfloor = -7$.
D'autre part, si $-3 \leqslant x < -\frac{5}{2}$, alors $-6 \leqslant 2x < -5$ donc $-7 \leqslant 2x-1 < -6$ d'où $\lfloor 2x-1 \rfloor = -7 = \lfloor x-4 \rfloor$.
• Si $-\frac{5}{2} \leqslant x < -2$, alors $-7 < -\frac{13}{2} \leqslant x-4 < -6$ d'où $\lfloor x-4 \rfloor = -7$.
D'autre part, si $-\frac{5}{2} \leqslant x < -2$, alors $-5 \leqslant 2x < -4$ donc $-6 \leqslant 2x-1 < -5$ d'où $\lfloor 2x-1 \rfloor = -6$ et on n'a pas l'égalité dans ce cas-là.
Finalement, l'ensemble des réels x tels que $\lfloor 2x-1 \rfloor = \lfloor x-4 \rfloor$ est $[-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}[$.

Exercice 11

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, soit $k \in \mathbb{Z}$. Par définition de la partie entière de x, on a $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$ donc

$$\lfloor x \rfloor + k \leqslant x + k < \lfloor x \rfloor + k + 1.$$

Par définition de la partie entière, ceci implique que $\lfloor x+k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$.

2. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Par définition de la partie entière de x et de y, on a $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$ et $\lfloor y \rfloor \leqslant y < \lfloor y \rfloor + 1$ donc par somme, on obtient

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant x+y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2.$$

On a donc $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant x+y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$ ou $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1 \leqslant x+y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$, d'où $\lfloor x+y \rfloor \in \{\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor, \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1\}$, i.e. $\lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \in \{0,1\}$.

3. Soit $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$.

• Si n et m sont de même parité, alors $n+m$ est pair donc $\dfrac{n+m}{2} \in \mathbb{Z}$ d'où

$$\left\lfloor \frac{n+m}{2} \right\rfloor = \frac{n+m}{2}.$$

D'autre part, dans ce cas $n-m+1$ est impair donc $\left\lfloor \dfrac{n-m+1}{2} \right\rfloor = \dfrac{n-m}{2}$ car

$$\frac{n-m}{2} \leqslant \frac{n-m+1}{2} < \frac{n-m}{2} + 1$$

et $\dfrac{n-m}{2}$ est un entier puisque $n-m$ est pair.

Ainsi, on a $\left\lfloor \dfrac{n+m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{n-m+1}{2} \right\rfloor = \dfrac{n+m}{2} + \dfrac{n-m}{2} = n$.

• Si n et m ne sont pas de même parité, alors $n+m$ est impair et $n+m-1$ est pair donc $\dfrac{n+m-1}{2} \in \mathbb{Z}$ et on a

$$\frac{n+m-1}{2} \leqslant \frac{n+m}{2} < \frac{n+m-1}{2} + 1$$

donc $\left\lfloor \dfrac{n+m}{2} \right\rfloor = \dfrac{n+m-1}{2}$.

D'autre part, dans ce cas, $n-m+1$ est pair donc $\dfrac{n-m+1}{2} \in \mathbb{Z}$ d'où $\left\lfloor \dfrac{n-m+1}{2} \right\rfloor = \dfrac{n-m+1}{2}$.

Ainsi, on a $\left\lfloor \dfrac{n+m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{n-m+1}{2} \right\rfloor = \dfrac{n+m-1}{2} + \dfrac{n-m+1}{2} = n$.

Finalement, dans tous les cas, on a pour tout $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$, $\left\lfloor \dfrac{n+m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{n-m+1}{2} \right\rfloor = n$.

4. • Soit $x \in \mathbb{R}$, soit $(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

Soit $p = \left\lfloor \dfrac{x+m}{n} \right\rfloor$. Par définition de la partie entière, on a

$$p \leqslant \frac{x+m}{n} < p+1$$

d'où

$$np \leqslant x+m < np+n$$

ou encore $np - m \leqslant x < np + n - m$.

Par croissance de la fonction partie entière sur $\mathbb{R}$, on en déduit que

$$\lfloor np - m \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor < \lfloor np + n - m \rfloor.$$

Puisque $np - m$ et $np + n - m$ sont des entiers, on a $np - m \leqslant \lfloor x \rfloor < np + n - m$ d'où

$$np \leqslant \lfloor x \rfloor + m < np + n \Rightarrow p \leqslant \frac{\lfloor x \rfloor + m}{n} < p + 1,$$

ce qui implique que $\left\lfloor \dfrac{\lfloor x \rfloor + m}{n} \right\rfloor = p = \left\lfloor \dfrac{x + m}{n} \right\rfloor$.

• En appliquant le résultat précédent en remplaçant x par nx et m par 0, on trouve pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{nx}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Exercice 12

1. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $x < y$. Soit $q \in \mathbb{N}^*$ (l'énoncé propose de prendre un réel, mais tant qu'à faire, prenons un entier !) tel que $q > \dfrac{1}{y - x}$.

   (a) Soit $m = \lfloor qx \rfloor$. Alors, par définition de la partie entière, on a

   $$m \leq qx < m + 1 \Leftrightarrow \frac{m}{q} \leq x < \frac{m}{q} + \frac{1}{q}.$$

   Or, puisque $q > \dfrac{1}{y - x}$, on a $\dfrac{1}{q} < y - x$ d'où

   $$\frac{m}{q} + \frac{1}{q} \leq x + \frac{1}{q} < x + y - x = y.$$

   Ainsi, on a bien

   $$x < \frac{m + 1}{q} < y.$$

   (b) Puisque $m \in \mathbb{Z}$, on a $m + 1 \in \mathbb{Z}$ et puisque $q \in \mathbb{N}^*$, on a bien $\dfrac{m + 1}{q} \in \mathbb{Q}$.

   On a donc montré que $\dfrac{m + 1}{q} \in \mathbb{Q} \cap]x, y[$ d'où $\mathbb{Q} \cap]x, y[\neq \emptyset$.

   Ceci étant vrai pour tout couple de réels $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $x < y$, on en déduit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

2. Il s'agit désormais de montrer que dans tout intervalle de la forme $]x, y[$ avec $x < y$, il existe au moins un nombre irrationnel.

   Pour ce faire, considérons $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $x < y$. Alors, on a $x - \sqrt{2} < y - \sqrt{2}$.

   D'après la question précédente, il existe un nombre rationnel $r \in \mathbb{Q} \cap]x - \sqrt{2}, y - \sqrt{2}[$, i.e.

   $$x - \sqrt{2} < r < y - \sqrt{2}$$

   d'où

   $$x < r + \sqrt{2} < y.$$

   Montrons que $r + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Supposons par l'absurde que $r+\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, c'est à dire supposons qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ tel que $r+\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$. De même, puisque $r \in \mathbb{Q}$, il existe $(a',b') \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ tel que $r = \dfrac{a'}{b'}$. On a donc

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} - r = \frac{a}{b} - \frac{a'}{b'} = \frac{ab'-a'b}{bb'} \in \mathbb{Q}$$

donc $\sqrt{2}$ est rationnel, ce qui est absurde.
Ainsi, $r+\sqrt{2}$ est irrationnel et appartient à $]x,y[$.
On a donc montré qu'il existait un nombre irrationnel dans tout intervalle de la forme $]x,y[$ avec $x<y$, ce qui prouve que $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 13

1. $\mathbb{R}$.
2. $]-2,1[$.
3. $]-3,0[$.
4. On a $x < x^2-12 < 4x \Leftrightarrow x^2-x-12>0$ et $x^2-4x-12<0 \Leftrightarrow x \in (]-\infty,-3[\cup]4,+\infty[)\cap(]-2,6[) \Leftrightarrow x \in]4,6[$.
5. $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.
6. $]-3,2[$.
7. • Si $x>-2$, on a $\dfrac{2x+1}{x+2} < 1 \Leftrightarrow 2x+1 < x+2 \Leftrightarrow x<1 \Leftrightarrow x \in]-2,1[$.
   • Si $x<-2$, on a $\dfrac{2x+1}{x+2} < 1 \Leftrightarrow 2x+1 > x+2 \Leftrightarrow x>1$, ce qui est absurde.
   L'ensemble cherché est donc $]-2,1[$.
8. $[1,+\infty[$.
9. $]-\infty,-2]\cup[3,+\infty[$.

Exercice 14

1. $(x,y)=(-2,-3)$ ou $(x,y)=(-3,-2)$.
2. $(x,y) = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ ou $(x,y) = \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.
3. x et y sont racines du trinôme $r^2-mr+1=0$ qui a pour discriminant $\Delta = m^2-4$.
   • Si $m \in]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[, \Delta>0$ donc le trinôme admet deux racines distinctes que sont $(x,y) = \left(\dfrac{m+\sqrt{m^2-4}}{2}, \dfrac{m-\sqrt{m^2-4}}{2}\right)$ ou $(x,y) = \left(\dfrac{m-\sqrt{m^2-4}}{2}, \dfrac{m+\sqrt{m^2-4}}{2}\right)$.
   • Si $m \in \{-2,2\}, \Delta = 0$ et le trinôme admet une racine double $(x,y) = (\frac{m}{2}, \frac{m}{2})$.
   • Si $m \in]-2,2[, \Delta<0$ donc le trinôme n'a pas de racines réelles.

Exercice 15

On a $e^x+me^{-x}-m-1=0 \Leftrightarrow e^x(e^x+me^{-x}-m-1)=0 \Leftrightarrow e^{2x}-(m+1)e^x+m=0$.
Posons $y=e^x$.
L'équation est alors équivalente à $y^2-(m+1)y+m=0 \Leftrightarrow y=m$ ou $y=1 \Leftrightarrow e^x=m$ ou $e^x=1$.

• Si $m > 0$, ceci équivaut à $x = \ln(m)$ ou $x = 0$, qui sont donc les deux solutions de l'équation.
• Si $m \leqslant 0$, il y a une seule solution qui est $x = 0$.

Exercice 16

On raisonne par analyse-synthèse.

1. • **Analyse :** Soit $x \geqslant -7$ tel que $5 - x = \sqrt{x+7}$.
   En élevant cette équation au carré, on obtient $x^2-10x+25 = x+7$ d'où $x^2-11x+18 = 0$. Ce trinôme du second degré admet pour racines $x_1 = 2$ et $x_2 = 9$ donc si x est solution de l'équation de départ, nécessairement $x = 2$ ou $x = 9$.
   • **Synthèse :** Vérifions si $x = 2$ et $x = 9$ sont bien solutions de l'équation.
   Si $x = 2$, on a bien $5 - x = 3$ et $\sqrt{x+7} = \sqrt{9} = 3$.
   Si $x = 9$, on a $5 - x = -4$ et $\sqrt{x+7} = \sqrt{16} = 4$ donc $x = 9$ n'est pas solution de l'équation.
   Ainsi, l'unique solution de l'équation est $x = 2$.
2. L'équation est bien définie si $-2x+4 \geqslant 0$ et $x^2 - 3 \geqslant 0$, i.e. $x \leqslant 2$ et $x \in]-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty[$, c'est à dire $x \in]-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 2]$.
   On a $\sqrt{-2x+4} - \sqrt{x^2-3} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{-2x+4} = \sqrt{x^2-3}$. Puisque les racines carrées sont des nombres positifs, par élévation au carré, ceci équivaut à
   $$-2x+4 = x^2 - 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = -1 - 2\sqrt{2} \,\text{ou}\, x = -1 + 2\sqrt{2}.$$
   On a bien $-1 - 2\sqrt{2} < -\sqrt{3}$ et $-1 + 2\sqrt{2} \in [\sqrt{3}, 2]$ donc ce sont bien les deux solutions de cette équation.
3. L'équation est bien définie pour $x \geqslant -\dfrac{1}{2}$.
   •**Analyse :** Soit $x \geqslant -\dfrac{1}{2}$ tel que $x + \sqrt{2x+1} = 1$.
   Alors $\sqrt{2x+1} = 1 - x$ d'où par élévation au carré
   $$2x + 1 = (1-x)^2 \Rightarrow 2x + 1 = 1 - 2x + x^2 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \,\text{ou}\, x = 4.$$
   •**Synthèse :** Si $x = 0$, on a bien $x + \sqrt{2x+1} = \sqrt{1} = 1$.
   Si $x = 4$, on a $x + \sqrt{2x+1} = 4 + \sqrt{9} = 13 \neq 1$ donc l'unique solution est $x = 0$.