
CORRIGÉ DU DEVOIR MAISON N°1

Exercice 1.

1. Il s'agit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. Montrons-le par récurrence.

Initialisation : Pour $n = 1$, on a $\sum_{k=1}^1 k^3 = 1^3 = 1 = \left(\frac{1 \times 2}{2}\right)^2$, donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Montrons que $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$.

On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1)^3 \quad (\text{Relation de Chasles}) \\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 \\ &= \frac{(n+1)^2}{4} (n^2 + 4(n+1)) \\ &= \frac{(n+1)^2}{4} (n^2 + 4n + 4) \\ &= \frac{(n+1)^2}{4} (n+2)^2 \\ &= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2, \end{aligned}$$

ce qui prouve la formule au rang $n + 1$.

D'après le principe de récurrence, on a bien montré que

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^n k\right)^2.}$$

2. Montrons par récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = n$.

• **Initialisation :** Pour $n = 1$, on a $\sum_{k=1}^1 x_k^3 = \left(\sum_{k=1}^1 x_k\right)^2$ donc

$$x_1^3 = x_1^2 \Rightarrow x_1^2(x_1 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ ou } x_1 = 1.$$

Puisque la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est à termes strictement positifs, on a $x_1 = 1$, ce qui prouve la propriété au rang $n = 1$.

•**Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_k = k$.

Montrons que $x_{n+1} = n + 1$.

Par hypothèse sur la suite, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} x_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k \right)^2 &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n k^3 + x_{n+1}^3 = \left(\sum_{k=1}^n k + x_{n+1} \right)^2 \quad (\text{Hypothèse de récurrence}) \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + x_{n+1}^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + 2 \times \frac{n(n+1)}{2} \times x_{n+1} + x_{n+1}^2 \\ &\Leftrightarrow x_{n+1} (x_{n+1}^2 - x_{n+1} - n(n+1)) = 0 \\ &\Leftrightarrow x_{n+1}^2 - x_{n+1} - n(n+1) = 0 \quad (\text{car } x_{n+1} \neq 0) \\ &\Leftrightarrow (x_{n+1} - n - 1)(x_{n+1} + n) = 0 \\ &\Leftrightarrow x_{n+1} = n + 1 \quad \text{ou} \quad x_{n+1} = -n. \end{aligned}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n > 0$ donc $x_n = -n$ est impossible. Ainsi, on a nécessairement $x_{n+1} = n + 1$, ce qui prouve la formule au rang $n + 1$.

D'après le principe de récurrence, on a bien montré que

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, x_n = n.}$$

Exercice 2. Raisonnons par analyse-synthèse.

•**Analyse** : Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

Pour $x = y = 0$, on obtient

$$f(0)^2 - f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0)(f(0) - 1) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0 \text{ ou } f(0) = 1.$$

Supposons que $f(0) = 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a alors en posant $y = 0$:

$$f(x)f(0) - f(0) = x \Leftrightarrow x = 0,$$

et ce pour tout réel x , ce qui est absurde.

Nécessairement, on a $f(0) = 1$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a en posant $y = 0$:

$$f(x)f(0) - f(0) = x \Leftrightarrow f(x) = x + 1.$$

•**Synthèse** : Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1$.

On a alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x)f(y) - f(xy) = (x + 1)(y + 1) - xy - 1 = xy + x + y + 1 - xy - 1 = x + y.$$

Ainsi, l'unique fonction définie sur \mathbb{R} à vérifier cette propriété est $\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + 1. \end{array}$

Exercice 3.

Remarquons que les Pomékon de base et bien dressés disent la vérité, les Pomékon de base et mal dressés ne disent pas la vérité, les Pomékon évolués et bien dressés ne disent pas la vérité et les Pomékon évolués et mal dressés disent la vérité.

●Énigme 1 :

- Supposons que Pticachou soit un Pomékon évolué et bien dressé. Alors ce qu'il dit est faux. Or, la négation de son affirmation est : « Je suis un Pomékon évolué et mal dressé ». Contradiction.
- Supposons que Pticachou soit un Pomékon évolué et mal dressé. Alors ce qu'il dit est vrai, donc de deux choses l'une : ou bien c'est un Pomékon de base, ou bien il est bien dressé. Contradiction.
- Supposons que Pticachou soit un Pomékon de base et mal dressé. Alors ce qu'il dit est faux donc comme dans le premier cas, on en déduit que c'est un Pomékon évolué et mal dressé. Contradiction.
- Supposons que Pticachou soit un Pomékon de base et bien dressé. Alors ce qu'il dit est vrai, et effectivement, c'est un Pomékon de base ou bien dressé.

Pticachou est donc un Pomékon de base bien dressé.

●Énigme 2 :

- Supposons que Perspicouac soit un Pomékon de base bien dressé. Alors ce qu'il dit est vrai. Ainsi, il n'est pas un Pomékon de base bien dressé. Contradiction.
- Supposons que Perspicouac soit un Pomékon de base et mal dressé. Alors ce qu'il dit est faux. Ainsi, il est un Pomékon de base bien dressé. Contradiction.
- Supposons que Perspicouac soit un Pomékon évolué et bien dressé. Alors ce qu'il dit est faux. Donc c'est un Pomékon de base bien dressé. Contradiction.
- Supposons que Perspicouac soit un Pomékon évolué et mal dressé. Alors ce qu'il dit est vrai, donc ce n'est pas un Pomékon de base bien dressé, ce qui est exact.

Perspicouac est donc un Pomékon évolué mal dressé.

●Énigme 3 :

Supposons que Roudoudou ait répondu oui, c'est à dire qu'il confirme être un Pomékon évolué mal dressé.

- Supposons que Roudoudou soit un Pomékon de base bien dressé. Alors ce qu'il dit est vrai et c'est donc un Pomékon évolué mal dressé. Contradiction.
- Supposons que Roudoudou soit un Pomékon de base mal dressé. Alors ce qu'il dit est faux. Ainsi, la bonne réponse à la question était non, ce qui signifie qu'il n'est pas un Pomékon évolué mal dressé, ce qui est tout à fait juste.
- Supposons que Roudoudou soit un Pomékon évolué et bien dressé. Alors ce qu'il dit est faux, et comme dans le cas précédent, cela implique que ce n'est pas un Pomékon évolué mal dressé, ce qui est encore juste.
- Supposons que Roudoudou soit un Pomékon évolué et mal dressé. Alors ce qu'il dit est vrai, et c'est un Pomékon évolué et mal dressé.

Ainsi, si Roudoudou répond oui, on ne peut pas conclure quant à son niveau d'évolution et son niveau de dressage (on peut juste exclure qu'il soit un Pomékon de base bien dressé).

Puisque l'énoncé de l'énigme dit que sa réponse suffit à conclure, c'est qu'il a nécessairement répondu non, c'est à dire qu'il nie être un Pomékon évolué mal dressé.

- Supposons que Roudoudou soit un Pomékon évolué et bien dressé. Alors ce qu'il dit est faux, donc c'est un Pomékon évolué mal dressé. Contradiction.
- Supposons que Roudoudou soit un Pomékon évolué et mal dressé. Alors ce qu'il dit est vrai, et il n'est donc pas un Pomékon évolué mal dressé. Contradiction.
- Supposons que Roudoudou soit un Pomékon de base mal dressé. Alors ce qu'il dit est faux, donc c'est un Pomékon évolué mal dressé. Contradiction.
- Supposons que Roudoudou soit un Pomékon de base bien dressé. Alors ce qu'il dit est vrai, et ce n'est pas un Pomékon évolué mal dressé, ce qui est tout à fait juste!

Roudoudou est donc un Pomékon de base bien dressé.

Énigme 4

L'affirmation de Samalèche est logiquement équivalente à « Je suis un Pomékon évolué si et seulement si je suis bien dressé. »

S'il dit la vérité, c'est un Pomékon de base mal dressé ou un Pomékon évolué bien dressé. Mais ces deux types de Pomékon ne disent pas la vérité. Contradiction.

Nécessairement, Samalèche ne dit pas la vérité.

Ainsi, c'est un Pomékon de base bien dressé ou un Pomékon évolué mal dressé. Mais ces deux types de Pomékon disent la vérité! Contradiction à nouveau.

Aucun Pomékon ne peut dire cette phrase.

Remarque : en logique, c'est ce qu'on appelle un paradoxe.