# 5 Dénombrement

## 5.1 Ensembles finis

### 5.1.1 Cardinal

Commençons par un lemme préliminaire, utile en soi.

**Lemme 1**

Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ deux entiers naturels non nuls.

1. Il existe une injection $f : [\![1,n]\!] \longrightarrow [\![1,p]\!]$ si et seulement si $n \leq p$.
2. Il existe une surjection $f : [\![1,n]\!] \longrightarrow [\![1,p]\!]$ si et seulement si $n \geq p$.
3. Il existe une bijection $f : [\![1,n]\!] \longrightarrow [\![1,p]\!]$ si et seulement si $n = p$.

**Démonstration.**

1. • Supposons que $n \leq p$.
   Alors l'application $\begin{array}{rcl} f : [\![1,n]\!] & \longrightarrow & [\![1,p]\!] \\ k & \longmapsto & k \end{array}$ est injective.
   • Supposons qu'il existe une injection $f : [\![1,n]\!] \longrightarrow [\![1,p]\!]$.
   Alors les éléments $f(1),\dots,f(n)$ de $[\![1,p]\!]$ sont deux à deux distincts. Ainsi, l'ensemble $\{f(1),\dots,f(n)\}$ est une sous-partie de $[\![1,p]\!]$ à $n$ éléments. A fortiori, $n \leq p$.
2. • Supposons que $n \geq p$. Alors l'application
   $$\begin{array}{rcl} f : [\![1,n]\!] & \longrightarrow & [\![1,p]\!] \\ k & \longmapsto & \begin{cases} k & \text{si } k \leq p \\ p & \text{si } k > p \end{cases} \end{array}$$
   est surjective.
   • Supposons qu'il existe une surjection $f : [\![1,n]\!] \longrightarrow [\![1,p]\!]$.
   Pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, il existe $x_k \in [\![1,n]\!]$, tel que $f(x_k) = k$. On a nécessairement $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$ puisque $f(x_i) = i \neq j = f(x_j)$.
   Ainsi, l'ensemble $\{x_k | 1 \leq k \leq p\}$ est une partie à $p$ éléments de $[\![1,n]\!]$. A fortiori, $n \geq p$.
3. • Supposons que $n = p$. Alors $[\![1,n]\!] = [\![1,p]\!]$ et $\mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]} : [\![1,n]\!] \longrightarrow [\![1,p]\!]$ est bien une bijection.
   • Supposons qu'il existe une bijection $f : [\![1,n]\!] \longrightarrow [\![1,p]\!]$.
   Puisque $f$ est injective, d'après le premier point, $n \leqslant p$.
   Puisque $f$ est surjective, d'après le deuxième point, $n \geqslant p$. Finalement, on a bien $n = p$.

$\blacksquare$

**Définition 1: Ensembles en bijection**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles. On dit que $E$ et $F$ sont en bijection s'il existe une application $\varphi : E \longrightarrow F$ bijective.

**Remarque 1.** Dans ce cas, il existe également une bijection $\varphi^{-1} : F \longrightarrow E$.

**Définition 2: Ensemble fini**

Soit $E$ un ensemble non vide. On dit que $E$ est un ensemble fini s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $[\![1, n]\!]$ et $E$ sont en bijection.
Dans ce cas, on dit que $E$ est de cardinal $n$ et on note $\text{card}(E) = n$ (ou $\#E = n$).
Concrètement, ceci signifie que $E$ contient $n$ éléments et on peut en dresser la liste en notant par exemple

$$E = \{x_1, \ldots, x_n\}.$$

**Remarque 2.** D'après le lemme, l'entier naturel $n$ tel que $[\![1, n]\!]$ est en bijection avec $E$ est unique.

En effet, s'il existe $\varphi : [\![1, n]\!] \longrightarrow E$ bijective et $\psi : [\![1, p]\!] \longrightarrow E$ bijective, alors $\psi^{-1} \circ \varphi : [\![1, n]\!] \longrightarrow [\![1, p]\!]$ est une bijection d'où $n = p$ d'après le lemme.

Dans la suite de ce chapitre, nous ne considèrerons que des ensembles finis.

**Remarque 3.** • Par convention, $\text{card}(\emptyset) = 0$.
• Un ensemble non fini est dit infini. C'est par exemple le cas des ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.

**Exemple 1.** • $\text{card}\{2\} = 1; \text{card}\{\sqrt{2}, \pi\} = 2; \text{card}\{(1, 2)\} = 1$.
• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\text{card}([\![1, n]\!]) = \text{card}([\![0, n-1]\!]) = n$.
• Si $p \leq q, \text{card}[\![p, q]\!] = q - p + 1$.

### 5.1.2 Propriétés

**Proposition 1: Cardinal d'une union disjointe**

Soit $E$ un ensemble fini non vide, soient $A$ et $B$ des parties disjointes de $E$ (i.e. $A \cap B = \emptyset$).
Alors $\text{card}(A \sqcup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$.

**Démonstration.** Soit $n = \text{card}(A)$ et $p = \text{card}(B)$. Il existe deux bijections $\varphi : [\![1, n]\!] \longrightarrow A$ et $\psi : [\![1, p]\!] \longrightarrow B$.

Considérons l'application

$$\begin{array}{rcl} f : [\![1, n+p]\!] & \longrightarrow & A \sqcup B \\ k & \longmapsto & \begin{cases} \varphi(k) & \text{si } 1 \leq k \leq n \\ \psi(k-n) & \text{si } n+1 \leq k \leq n+p. \end{cases} \end{array}$$

• Prouvons que $f$ est injective.

Soient $(i, j) \in [\![1, n+p]\!]^2$ tels que $f(i) = f(j)$.

- Si l'un des deux indices est dans $[\![1, n]\!]$ et l'autre dans $[\![n+1, n+p]\!]$, par exemple si $1 \leq i \leq n$ et $n+1 \leq j \leq n+p$, on a $f(i) = \varphi(i) \in A$ et $f(j) = \psi(j-n) \in B$ donc $f(i) = f(j) \in A \cap B = \emptyset$, ce qui est absurde. Ce cas est donc impossible.

- Si $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, alors $f(i) = f(j) \Leftrightarrow \varphi(i) = \varphi(j) \Leftrightarrow i = j$ par injectivité de $\varphi$.

- Si $(i, j) \in [\![n+1, n+p]\!]^2$, alors $f(i) = f(j) \Leftrightarrow \psi(i-n) = \psi(j-n) \Leftrightarrow i - n = j - n$ par injectivité de $\psi$, d'où $i = j$.

On a donc bien montré que si $f(i) = f(j)$, alors $i = j$, ce qui prouve l'injectivité de $f$.

• Prouvons que $f$ est surjective.

Soit $x \in A \sqcup B$. Si $x \in A$, par surjectivité de $\varphi$, il existe $k \in [\![1, n]\!]$, tel que $f(k) = \varphi(k) = x$. Si $x \in B$, par surjectivité de $\psi$, il existe $k \in [\![n+1, n+p]\!]$, tel que $f(k) = \psi(k-n) = x$.

Ainsi, pour tout $x \in A \sqcup B$, il existe $k \in [\![1, n+p]\!]$ tel que $f(k) = x$. On a donc bien prouvé que $f$ est surjective.

On en déduit que $f : [\![1, n+p]\!] \longrightarrow A \cup B$ est bijective. Par définition, ceci implique que

$$\mathrm{card}(A \sqcup B) = n + p = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B).$$

■

## Corollaire 1

Soit $E$ un ensemble fini non vide. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour toute famille $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ de parties de $E$ deux à deux disjointes (i.e. $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$), on a

$$\mathrm{card}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{card}(A_k).$$

**Démonstration.** Montrons la propriété par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $n = 1, \mathrm{card}\left(\bigcup_{k=1}^{1} A_k\right) = \mathrm{Card}(A_1) = \sum_{k=1}^{1} \mathrm{card}(A_k)$ donc la propriété est vraie au rang $n = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On suppose que la propriété est vraie au rang $n$. Montrons-la au rang $n+1$.

Tout d'abord, $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ et $A_{n+1}$ sont disjoints :

$$\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cap A_{n+1} = \bigcup_{k=1}^{n} (A_k \cap A_{n+1}) = \bigcup_{k=1}^{n} \emptyset = \emptyset.$$

On peut donc appliquer la proposition précédente et on a

$$\mathrm{card}\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) = \mathrm{card}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + \mathrm{card}(A_{n+1}).$$

Par hypothèse de récurrence,

$$\mathrm{card}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{card}(A_k)$$

d'où

$$\mathrm{card}\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{card}(A_k) + \mathrm{card} A_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{card}(A_k),$$

ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence. ■

## Proposition 2

Soit $E$ un ensemble fini non vide. Soient $A$ et $B$ des parties de $E$.

1. $\mathrm{card}(\overline{A}) = \mathrm{card}(E) - \mathrm{card}(A)$.
2. Si $A \subset B$, alors $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(B)$ avec égalité si et seulement si $A = B$.
3. $\mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) - \mathrm{card}(A \cap B)$

**Démonstration.**

1. On a $E = A \sqcup \overline{A}$ avec $A$ et $\overline{A}$ disjoints donc d'après la proposition précédente,
$$\mathrm{card}(E) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(\overline{A}),$$
d'où le résultat.
2. Supposons que $A \subset B$. Alors $B = A \cup (B \setminus A)$ avec $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$. En utilisant la proposition précédente, on a donc
$$\mathrm{card}(B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B \setminus A).$$
Puisque $\mathrm{card}(B \setminus A) \geq 0$, on a bien l'inégalité voulue.
Par ailleurs, $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B) \Leftrightarrow \mathrm{card}(B \setminus A) = 0 \Leftrightarrow B \setminus A = \emptyset \Leftrightarrow B \subset A$ d'où $A = B$.
3. $A \cup B$ peut s'écrire comme union d'ensembles deux à deux disjoints de la façon suivante :
$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$$
donc
$$\mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}(A \setminus B) + \mathrm{card}(A \cap B) + \mathrm{card}(B \setminus A).$$
Par ailleurs, on a de même $A = (A \cap B) \sqcup (A \setminus B)$ et $B = (A \cap B) \sqcup (B \setminus A)$ d'où
$$\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(A \cap B) + \mathrm{card}(A \setminus B) \quad \text{et} \quad \mathrm{card}(B) = \mathrm{card}(A \cap B) + \mathrm{card}(B \setminus A).$$
En sommant, on a donc
$$\begin{aligned} \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) - \mathrm{card}(A \cap B) &= 2\mathrm{card}(A \cap B) + \mathrm{card}(A \setminus B) + \mathrm{card}(B \setminus A) - \mathrm{card}(A \cap B) \\ &= \mathrm{card}(A \setminus B) + \mathrm{card}(A \cap B) + \mathrm{card}(B \setminus A) \\ &= \mathrm{card}(A \cup B). \end{aligned}$$

■

### 5.1.3 Injections, surjections et bijections entre ensembles finis

**Théorème 1**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles finis non vides.
Alors :

1. Il existe une injection $f : E \longrightarrow F$ si et seulement si $\mathrm{card}(E) \leq \mathrm{card}(F)$.
2. Il existe une surjection $f : E \longrightarrow F$ si et seulement si $\mathrm{card}(E) \geq \mathrm{card}(F)$.
3. $E$ et $F$ sont en bijection si et seulement si $\mathrm{card}(E) = \mathrm{card}(F)$.

**Démonstration.** Soit $n = \mathrm{card}(E)$ et $p = \mathrm{card}(F)$. Il existe des bijections $\varphi : [\![1, n]\!] \longrightarrow E$ et $\psi : [\![1, p]\!] \longrightarrow F$.

1. • Supposons qu'il existe une injection $f : E \longrightarrow F$.
Alors l'application $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : [\![1, n]\!] \longrightarrow [\![1, p]\!]$ est une injection comme composée d'injections.
D'après le lemme, ceci implique que $\mathrm{card}(E) = n \leq p = \mathrm{card}(F)$.
• Supposons que $n \leq p$.
D'après le lemme, il existe une injection $g : [\![1, n]\!] \longrightarrow [\![1, p]\!]$.
Alors l'application $f = \psi \circ g \circ \varphi^{-1} : E \longrightarrow F$ est une injection comme composée d'injections.

2. • Supposons qu'il existe une surjection $f : E \longrightarrow F$.
   Alors l'application $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : [\![1, n]\!] \longrightarrow [\![1, p]\!]$ est une surjection comme composée de surjections.
   D'après le lemme, ceci implique que $\mathrm{card}(E) = n \geq p = \mathrm{card}(F)$.
   • Supposons que $n \geq p$.
   D'après le lemme, il existe une surjection $g : [\![1, n]\!] \longrightarrow [\![1, p]\!]$.
   Alors l'application $f = \psi \circ g \circ \varphi^{-1} : E \longrightarrow F$ est une surjection comme composée de surjections.
3. • Supposons qu'il existe une bijection $f : E \longrightarrow F$.
   Alors l'application $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : [\![1, n]\!] \longrightarrow [\![1, p]\!]$ est une bijection comme composée de bijections.
   D'après le lemme, ceci implique que $\mathrm{card}(E) = n = p = \mathrm{card}(F)$.
   • Supposons que $n = p$.
   D'après le lemme, il existe une bijection $g : [\![1, n]\!] \longrightarrow [\![1, p]\!]$.
   Alors l'application $f = \psi \circ g \circ \varphi^{-1} : E \longrightarrow F$ est une bijection comme composée de bijections.

■

**Proposition 3**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles finis non vides tels que

$$\mathrm{card}(E) = \mathrm{card}(F).$$

Alors :

1. Toute injection de $E$ dans $F$ est bijective.
2. Toute surjection de $E$ dans $F$ est bijective.

**Démonstration.**

1. Soit $f : E \longrightarrow F$ une injection.
   Alors $\tilde{f} : E \longrightarrow f(E)$ est bijective ce qui implique que $\mathrm{card}(E) = \mathrm{card}(f(E))$.
   Or, $\mathrm{card}(E) = \mathrm{card}(F)$ donc $\mathrm{card}(f(E)) = \mathrm{card}(F)$.
   Puisque $f(E) \subset F$, ceci implique que $f(E) = F$, donc $f$ est surjective.
   $f$ étant à la fois injective et surjective, $f$ est bijective.
2. Soit $f : E \longrightarrow F$ une surjection. Soit $p = \mathrm{card}(F)$. Notons $y_1, \ldots, y_p$ les éléments de $F$.
   Puisque $f$ est surjective, pour tout $1 \leq k \leq p$, il existe $x_k \in E$ tel que $f(x_k) = y_k$.
   Soit $A = \{x_k | 1 \leq k \leq p\}$.
   Par construction, la restriction de $f$ à $A$, $f_{|A} : A \longrightarrow F$ est injective et surjective, donc bijective.
   On en déduit que $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(F) = \mathrm{card}(E)$, et puisque $A \subset E$, ceci implique que $A = E$.
   Finalement, $f_{|A} = f$, donc $f$ est bijective.

■

**Remarque 4.** Le procédé utilisé dans la dernière preuve est général : pour toute application $f : E \longrightarrow F$, on peut toujours trouver une partie $A \subset E$ telle que la restriction de $f$ à $A$ $f_{|A} : A \longrightarrow f(E)$ soit bijective.

Il en découle directement le corollaire suivant :

**Corollaire 2**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles finis non vides tels que $\text{card}(E) = \text{card}(F)$. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.
On a les équivalences :

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow f \text{ est surjective} \Leftrightarrow f \text{ est bijective.}$$

**Remarque 5.** Autrement dit, pour montrer qu'une application entre ensembles finis de même cardinal est bijective, il suffit de montrer l'injectivité ou la surjectivité.

En revanche, si $E$ est un ensemble infini, il peut exister une application $f : E \longrightarrow F$ qui soit injective (ou surjective) mais pas bijective.

Par exemple, l'application $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & 2n \end{array}$ est injective mais pas surjective tandis que l'application $\begin{array}{rcl} g : \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor \end{array}$ est surjective mais pas injective.

## 5.2 Cardinaux remarquables

### 5.2.1 Cardinal d'un produit cartésien

**Proposition 4: Cardinal d'un produit cartésien**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles finis.
Alors le produit cartésien $E \times F$ est un ensemble fini et son cardinal vérifie

$$\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F).$$

**Démonstration.** Soit $n = \text{card}(E)$.
Notons $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$.
Alors $E \times F = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} (\{x_i\} \times F)$ avec $(\{x_i\} \times F) \cap (\{x_j\} \times F) = \emptyset$ si $i \neq j$.
Ainsi, $\text{card}(E \times F) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \text{card}(\{x_i\} \times F)$.
Or, pour tout $1 \leq i \leq n$, on a une bijection $\begin{array}{rcl} f_i : \{x_i\} \times F & \longrightarrow & F \\ (x_i, y) & \longmapsto & y \end{array}$ donc

$$\text{card}(\{x_i\} \times F) = \text{card}(F).$$

Il en découle que

$$\text{card}(E \times F) = \sum_{i=1}^{n} \text{card}(F) = n\text{card}(F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F).$$

■

**Remarque 6.** C'est le nombre de façons de choisir de façon indépendante un élément de $E$ et un élément de $F$.

Plus généralement, si $E_1, \dots, E_p$ sont des ensembles finis, alors

$$\operatorname{card}(E_1 \times \cdots \times E_p) = \prod_{k=1}^{p} \operatorname{card}(E_k).$$

**Corollaire 3**

Soit $E$ un ensemble fini.
Alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\operatorname{card}(E^p) = (\operatorname{card}(E))^p.$$

Autrement dit, si $\operatorname{card}(E) = n$, il y a $n^p$ $p$-uplets (ou $p$-listes) de $E$.

**Remarque 7.** Soit $n = \operatorname{card}(E)$. Le nombre $\operatorname{card}(E^p)$ désigne le nombre de façons de choisir successivement $p$ objets parmi $n$ objets distincts, avec d'éventuelles répétitions.

**Exemple 2.** Soit $E = \{0, 1\}$. Alors

$$E^3 = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$$

contient $2^3 = 8$ éléments.

### 5.2.2 Nombre d'applications entre ensembles finis

**Proposition 5: Cardinal de $F^E$**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles finis non vides. Soit $F^E$ l'ensemble des applications de $E$ dans $F$.
Alors

$$\operatorname{card}(F^E) = \operatorname{card}(F)^{\operatorname{card}(E)}.$$

**Remarque 8.** Ceci justifie la notation $F^E$, qui est utilisée même dans le cas où les ensembles sont infinis (par exemple dans le cas des suites réelles, que l'on note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$).

**Démonstration.** Soit $n = \operatorname{card}(E)$. Notons $E = \{x_1, \dots, x_n\}$.
Une application $f : E \longrightarrow F$ est entièrement caractérisée par la donnée du $n$-uplet $(f(x_1), \dots, f(x_n)) \in F^n$.
Il y a donc autant d'applications de $E$ dans $F$ que de $n$-uplets dans $F^n$, c'est à dire d'après la section précédente, $\operatorname{card}(F)^n = \operatorname{card}(F)^{\operatorname{card}(E)}$. ■

**Exemple 3.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il y a exactement $2^n$ applications de $[\![1, n]\!]$ dans $\{0, 1\}$.

**Définition 3: $p$-uplet sans répétition**

Soit $E$ un ensemble non vide. Soit $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$.
Le $p$-uplet $(x_1, \dots, x_p)$ est dit sans répétition si

$$\forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2, i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j.$$

Autrement dit, $(x_1, \dots, x_p)$ est dit sans répétition si les éléments du $p$-uplet sont distincts deux à deux.

**Remarque 9.** • Le nombre de $p$-uplets sans répétition est le nombre de façons de choisir successivement $p$ objets parmi $n$ objets distincts sans répétition.
• Si $p > \operatorname{card}(E)$, il n'existe pas de $p$-uplets de $E$ sans répétition.

**Proposition 6: Nombre de $p$-uplets sans répétition**

Soit $E$ un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in [\![1, n]\!]$.
Le nombre de $p$-uplets sans répétition de $E$ est

$$n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

**Démonstration.** Construisons un $p$-uplet $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$.
On peut choisir le premier élément $x_1 \in E$ de $n$ façons différentes.
On peut choisir le deuxième élément $x_2 \in E \setminus \{x_1\}$ de $n-1$ façons différentes.
On peut choisir le troisième élément $x_3 \in E \setminus \{x_1, x_2\}$ de $n-2$ façons différentes, etc...
On peut choisir le $p$-ème élément $x_p \in E \setminus \{x_1, \dots, x_{p-1}\}$ de $n-(p-1) = n-p+1$ façons différentes.
Il y a donc $n(n-1)\dots(n-p+1)$ façons de construire un $p$-uplet sans répétition.
D'autre part, on a bien

$$\frac{n!}{(n-p)!} = \frac{\prod_{k=1}^{n} k}{\prod_{k=1}^{n-p} k} = \frac{\prod_{k=1}^{n-p} k \prod_{k=n-p+1}^{n} k}{\prod_{k=1}^{n-p} k} = \prod_{k=n-p+1}^{n} k = n(n-1)\dots(n-p+1).$$

■

**Exemple 4.** Le nombre de façons de tirer successivement et sans remise trois boules dans une urne contenant 5 boules numérotées de 1 à 5 est égal à

$$\frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60.$$

**Corollaire 4: Nombre d'applications injectives entre ensembles finis**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles finis non vides de cardinaux $\text{card}(E) = n$ et $\text{card}(F) = p$ avec $n \leq p$.
Il y a $\dfrac{p!}{(p-n)!}$ applications injectives de $E$ dans $F$.

**Démonstration.** Notons $E = \{x_1, \dots, x_n\}$.
Une application injective $f : E \longrightarrow F$ est entièrement caractérisée par la donnée du $n$-uplet sans répétition (par injectivité de $f$) $(f(x_1), \dots, f(x_n))$.
Il y a donc autant d'applications injectives de $E$ dans $F$ que de $n$-uplets sans répétition dans $F$ qui est de cardinal $p$, à savoir $\dfrac{p!}{(p-n)!}$. ■

**Définition 4: Permutation**

Soit $E$ un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.
On appelle permutation de $E$ tout $n$-uplet de $E$ contenant exactement une fois chaque élément de $E$.

**Proposition 7: Nombre de permutations d'un ensemble fini**

Soit $E$ un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.
Il y a $n!$ permutations de $E$.

**Démonstration.** Une permutation est un $n$-uplet sans répétition de $E$ : il y en a donc $\dfrac{n!}{(n-n)!} = \dfrac{n!}{0!} = n!$. ■

**Remarque 10.** $n!$ est le nombre de façons de choisir successivement et sans répétition tous les objets d'un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.

**Exemple 5.** Les permutations de $[\![1, 3]\!]$ sont au nombre de 6 :

$$(1, 2, 3); (1, 3, 2); (2, 1, 3); (2, 3, 1); (3, 1, 2); (3, 2, 1).$$

**Corollaire 5: Nombre de bijections entre ensembles finis**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles finis de même cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.
Il y a $n!$ bijections de $E$ dans $F$.

**Démonstration.** Il y a $\dfrac{n!}{(n-n)!} = n!$ injections de $E$ dans $F$. Or, une application de $E$ dans $F$ est injective si et seulement si elle est bijective puisque $E$ et $F$ ont même cardinal, d'où le résultat. ∎

**Remarque 11.** Il y a donc $n!$ bijections de $E$ dans $E$. On appelle également permutations ces bijections.

### 5.2.3 Cœfficients binomiaux et formule du binôme de Newton

**Définition 5: Cœfficients binomiaux**

Soient $k$ un entier relatif et $n$ un entier naturel. On définit le cœfficient binomial $k$ parmi $n$, noté $\dbinom{n}{k}$ par

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \text{ ou } k < 0 \\ \dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leq k \leq n. \end{cases}$$

**Remarque 12.** Notons que par convention, $\dbinom{0}{0} = 1$.

**Exemple 6.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1; \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = 1; \binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n; \binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!(n-(n-1))!} = n.$$

On a également $\dbinom{n}{2} = \dfrac{n!}{2!(n-2)!} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

**Définition 6: Combinaisons**

Soit $E$ un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in [\![0, n]\!]$.
On appelle $p$-combinaison de $E$ toute partie de $E$ à $p$ éléments.

**Exemple 7.** Soit $E = \{1, 2, 3\}$. L'ensemble des 2-combinaisons de $E$ (aussi appelées paires) est

$$\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}.$$

On constate qu'il y en a $\dbinom{3}{2} = 3$.

Plus généralement, on a le résultat suivant :

**Proposition 8: Nombre de combinaisons**

Soit $E$ un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in [\![0, n]\!]$.
Il y a $\dbinom{n}{p}$ $p$-combinaisons de $E$.

**Démonstration.** Soit $p \in [\![0, n]\!]$. Construisons une partie à $p$ éléments de $E$.
Si $p = 0$, seul l'ensemble vide convient. Il y a donc bien $\binom{n}{0} = 1$ 0-combinaison de $E$.
Supposons que $1 \leq p \leq n$.

Commençons par construire un $p$-uplet sans répétition de $E$. Il y a $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ façons de choisir un tel $p$-uplet. Notons-le $(x_1, \ldots, x_p)$. On en déduit naturellement une partie à $p$-éléments de $E$, à savoir $A = \{x_1, \ldots, x_p\}$.

Or, toute permutation de $A$ est un $p$-uplet sans répétition dont on aurait déduit la même partie à $p$ éléments.

Autrement dit, il y a $p!$ $p$-uplets qui mènent à la même partie de $E$ à $p$ éléments.

Il faut donc diviser le nombre de $p$-uplets sans répétition de $E$ par $p!$ pour obenir le nombre de $p$-combinaisons de $E$.

Il y a donc bien $\dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dbinom{n}{p}$ $p$-combinaisons de $E$. ■

**Remarque 13.** $\dbinom{n}{p}$ est le nombre de façons de choisir simultanément $p$ objets parmi $n$ objets distincts. L'ordre desdits éléments n'est pas pris en compte.

**Exemple 8.** Dans un jeu de 52 cartes, il y a $\dbinom{52}{5}$ mains de 5 cartes possibles.

Les cœfficients binomiaux ont des propriétés calculatoires intéressantes que nous allons désormais énoncer.

**Proposition 9**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

1.
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k};$$

2.
$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$
si $k \neq 0$.

**Démonstration.**

1. • Preuve combinatoire : Soit $E$ un ensemble à $n$ éléments. $\dbinom{n}{k}$ est le nombre de parties de $E$ à $k$ éléments. Or, construire une partie à $k$ éléments revient exactement à construire son complémentaire, c'est à dire à choisir les $n-k$ éléments parmi $n$ qui ne vont pas constituer cette partie. D'où l'égalité attendue.
   • Preuve calculatoire : Remarquons d'abord que si $0 \leq k \leq n$, alors $0 \leq n-k \leq n$. On a
$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}.$$

2. • Preuve combinatoire : On dispose d'une classe de $n$ élèves. On souhaite compter le nombre de façons de former une équipe de $k$ personnes disposant d'un capitaine.

   Il y a deux manières de faire :

   - On choisit les $k$ personnes qui vont consituer l'équipe ($\binom{n}{k}$ façons de le faire) parmi lesquelles on choisit un capitaine ($k$ façons de le faire). Il y a donc $k \times \binom{n}{k}$ façons de former ces équipes.

   - On commence par choisir le capitaine de l'équipe ($n$ possibilités) puis on choisit les $k-1$ autres personnes de l'équipe parmi les $n-1$ restantes ($\binom{n-1}{k-1}$ façons de le faire). Il y a donc $n \times \binom{n-1}{k-1}$ façons de former ces équipes.

   Finalement, on a donc $k \times \binom{n}{k} = n \times \binom{n-1}{k-1}$ d'où $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

   • Preuve calculatoire :Si $k \neq 0$, on a

$$\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \frac{n}{k}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

■

La relation la plus célèbre et la plus importante à bien des égards portant sur les cœfficients binomiaux est la suivante :

**Proposition 10: Relation de Pascal**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

**Démonstration.** • Si $k < 0$, tous les cœfficients binomiaux en question sont nuls donc l'égalité est vérifiée.

• Si $k = 0$, on a $\binom{n}{-1} = 0$ et $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = 1$ donc l'égalité est vérifiée.

• Si $k > n+1$, tous les cœfficients binomiaux sont nuls en question sont nuls donc l'égalité est vérifiée.

• Si $k = n+1$, on a $\binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} = 1$ et $\binom{n}{k} = 0$ donc l'égalité est vérifiée.

• Supposons dorénavant que $1 \leq k \leq n$ de telle sorte que tous les cœfficients binomiaux en jeu soient non nuls. (Si $n = 0$, les quatre cas précédents couvrent tous les cas possibles).

Donnons d'abord une preuve combinatoire. Soit $E$ un ensemble à $n+1$ éléments dont on souhaite construire une partie $A$ à $k$ éléments (ce qui peut se faire de $\binom{n+1}{k}$ façons différentes). Soit $a \in E$.

Il y a deux possibilités qui s'excluent :

- Soit on choisit $a$ pour le mettre dans $A$ et il reste alors à choisir $k-1$ éléments parmi les $n$ autres de $E$ pour compléter $A$, ce qui peut se faire de $\binom{n}{k-1}$ façons différentes ;

- Soit on laisse $a$ de côté et il reste alors à choisir $k$ éléments parmi les $n$ autres de $E$ pour compléter $A$, ce qui peut se faire de $\binom{n}{k}$ façons différentes.

En additionnant les possibilités issues des deux cas, on trouve bien

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

On peut sinon vérifier cette relation par le calcul :

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{kn! + (n-k+1)n!}{k!(n+1-k)!} \\
&= \frac{(n+1)n!}{k!(n+1-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \\
&= \binom{n+1}{k}.
\end{aligned}$$

■

**Remarque 14.** (Triangle de Pascal)

La relation de Pascal permet de calculer les cœfficients binomiaux de manière récursive en les disposant dans un triangle, à la manière de Pascal.

Ainsi, pour obtenir le cœfficient en ligne $n+1$ et colonne $k$, il suffit d'ajouter les deux cœfficients qui se situent au-dessus et au-dessus à gauche de ce dernier, c'est à dire les cœfficients en ligne $n$ et colonnes $k$ et $k-1$. On obtient le triangle ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccccc}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1
\end{array}$$

On rappelle les identités remarquables bien connues :

**Proposition 11: Identités remarquables**

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a :

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
3. $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

**Exemple 9.** En utilisant, la première identité remarquable, on trouve aussi que

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Plus généralement, essayons de donner une formule permettant de calculer $(a+b)^n$ pour tout entier naturel $n$.

**Proposition 12: Formule du binôme de Newton**

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, soit $n \in \mathbb{N}$.
Alors
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

**Démonstration.** Montrons cette propriété par récurrence sur $\mathbb{N}$.

Pour $n = 0$, on a $(a+b)^0 = 1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{0} a^0 b^{0-0}$, donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. Montrons que la propriété reste vraie au rang $n+1$.

On a

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} a^i b^{n-i+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \quad (i = k+1) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \quad \left(\binom{n}{-1} = \binom{n}{n+1} = 0\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k},
\end{aligned}$$

ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence. La deuxième égalité s'obtient en échangeant les rôles de $a$ et $b$. ■

**Remarque 15.** On peut également donner une preuve combinatoire de cette formule.

En effet, lorsqu'on développe $(a+b)^n$, on regroupe les termes par monômes de la forme $a^k b^{n-k}$. Pour cela, on choisit les $k$ facteurs $a+b$ dans lesquels on choisira le $a$ (il y a $\binom{n}{k}$ façons de le faire) et on choisit $b$ dans les autres facteurs (il n'y a qu'un seul choix pour cela).

Pour tout $0 \leq k \leq n$, il y a donc $\binom{n}{k}$ facteurs de la forme $a^k b^{n-k}$, d'où le résultat.

**Exemple 10.**

$$\begin{aligned}
(a+b)^4 &= \binom{4}{0} a^0 b^4 + \binom{4}{1} a^1 b^3 + \binom{4}{2} a^2 b^2 + \binom{4}{3} a^3 b + \binom{4}{4} a^4 b^0 \\
&= b^4 + 4ab^3 + 6a^2b^2 + 4a^3b + a^4.
\end{aligned}$$

**Corollaire 6**

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, soit $n \in \mathbb{N}$.
Alors
$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k a^{n-k} b^k.$$

**Démonstration.** Il suffit d'appliquer le binôme de Newton à $a$ et $-b$ et utiliser le fait que $(-b)^{n-k} = (-1)^{n-k} b^{n-k}$ et $(-b)^k = (-1)^k b^k$. ∎

**Exemple 11.** $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3$.

Enfin, la formule du binôme de Newton permet également de calculer le cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.

**Proposition 13: Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini**

Soit $E$ un ensemble fini. Soit $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de $E$.
Alors $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble fini et son cardinal vérifie
$$\mathrm{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\mathrm{card}(E)}.$$
En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

**Démonstration.** Soit $n = \mathrm{card}(E)$.

• Preuve combinatoire : Listons les éléments de $E = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Si on souhaite former une partie $A$ de $E$, on passe en revue les éléments de $E$ et pour chacun, on a deux choix : le prendre dans $A$ ou ne pas le prendre. Il y a donc 2 possibilités pour $x_1$, 2 possibilités pour $x_2, \dots,$ 2 possibilités pour $x_n$.

Il y a donc $2^n$ façons de former une partie de $E$ d'où le résultat.

• Preuve calculatoire : Pour tout $0 \leq k \leq n$, il y a $\binom{n}{k}$ parties de $E$ à $k$ éléments. Pour calculer le nombre de parties de $E$, il faut donc sommer pour tout $0 \leq k \leq n$ le nombre de parties de $E$ à $k$ éléments, i.e.
$$\mathrm{card}(\mathcal{P}(E)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n.$$
∎