Corrigé du devoir surveillé de mathématiques n°1
Samedi 21 septembre 2024 (2h00)

Exercice 1

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1) = \sum_{k=0}^{n} k^2 - k = \sum_{k=0}^{n} k^2 - \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{6}(2n+1-3)$ donc $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1) = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}}$.

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{k+1}3^{-2k} = 2\sum_{k=0}^{n} 2^k \times (3^{-2})^k = 2\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{9}\right)^k$.

   Puisque $\frac{2}{9} \neq 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{k+1}3^{-2k} = 2 \times \frac{1-\left(\frac{2}{9}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{9}} = 2 \times \frac{1-\left(\frac{2}{9}\right)^{n+1}}{\frac{7}{9}}$ donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} 2^{k+1}3^{-2k} = \frac{18}{7}\left(1-\left(\frac{2}{9}\right)^{n+1}\right)}.$$

3.

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{i^2}{j+1} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}\frac{i^2}{j+1} = \sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j+1}\sum_{i=0}^{j} i^2 = \sum_{j=0}^{n}\frac{j(j+1)(2j+1)}{6(j+1)} = \frac{1}{6}\sum_{j=0}^{n}(2j^2+j)$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{j=0}^{n} j^2 + \frac{1}{6}\sum_{j=0}^{n} j = \frac{n(n+1)(2n+1)}{18} + \frac{n(n+1)}{12} = \frac{n(n+1)}{36}(2(2n+1)+3)$$

donc $\boxed{\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{i^2}{j+1} = \frac{n(n+1)(4n+5)}{36}}$.

4.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}$$

$$= 1-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$$

donc $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+2)} = \frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}}$.

Exercice 2

Remarquons déjà que A et B sont deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ donc leurs éléments sont de la forme $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Raisonnons par double inclusion.
• Montrons que $A \subset B$.
Soit $(x, y) \in A$. Posons $t = -x$.
Puisque $(x, y) \in A$, alors

$$2x + y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -2x - 1 = 2t - 1$$

donc il existe bien un réel t tel que $(x, y) = (-t, 2t - 1)$, ce qui prouve que $(x, y) \in B$, d'où l'inclusion $A \subset B$.
• Montrons que $B \subset A$.
Soit $(x, y) \in B$. Alors il existe un réel t tel que $(x, y) = (-t, 2t - 1)$.
On a alors $2x + y + 1 = -2t + 2t - 1 + 1 = 0$ donc $(x, y) \in A$, ce qui prouve l'inclusion $B \subset A$.
Finalement, on a bien montré par double inclusion que $\boxed{A = B.}$

Exercice 3

1. Tout d'abord, pour que $\sqrt{x}$ soit défini, il faut que $x \geqslant 0$. Ensuite, la fonction partie entière est définie sur $\mathbb{R}$, donc celle-ci n'apporte aucune contrainte.
   Finalement, $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+.}$
2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Puisque $n^2 \in \mathbb{R}_+$, $f(n^2)$ est bien défini et on a $f(n^2) = \lfloor \sqrt{n^2} \rfloor = \lfloor |n| \rfloor$.
   Puisque $|n| \in \mathbb{Z}$, $\lfloor |n| \rfloor = |n|$.
   Finalement, $\boxed{\text{pour tout}\, n \in \mathbb{Z},\, f(n^2) = |n|.}$
3. Soient $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ avec $x \leqslant y$.
   Par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, on a $\sqrt{x} \leqslant \sqrt{y}$ puis, par croissance de la fonction partie entière sur $\mathbb{R}$, on a $\lfloor \sqrt{x} \rfloor \leqslant \lfloor \sqrt{y} \rfloor$.
   Ainsi, $x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$, ce qui prouve que $\boxed{\text{la fonction}\, f \text{ est croissante sur}\, \mathbb{R}_+.}$
4. • On a $f(0) = \lfloor \sqrt{0} \rfloor = \lfloor 0 \rfloor = 0$.
   • On a $f(3) = \lfloor \sqrt{3} \rfloor$. Or, $1 \leqslant \sqrt{3} < 2$ donc $\lfloor \sqrt{3} \rfloor = 1$ d'où $\boxed{f(3) = 1.}$
   • On a $f(4\pi) = \lfloor \sqrt{4\pi} \rfloor = \lfloor 2\sqrt{\pi} \rfloor$.
   Or, $3 < \pi < 4$ $12 < 4\pi < 16$ puis par croissance de la fonction racine carrée, on obtient $\sqrt{12} < \sqrt{4\pi} < 4$, i.e. $2\sqrt{3} < \sqrt{4\pi} < 4$.
   Or, puisque $\frac{9}{4} < 3$, on a $\frac{3}{2} = \sqrt{\frac{9}{4}} < \sqrt{3}$ d'où $3 < 2\sqrt{3}$.
   Finalement $3 < 2\sqrt{3} < \sqrt{4\pi} < 4$, ce qui prouve que $\boxed{f(4\pi) = \lfloor 4\pi \rfloor = 3.}$
   • On sait que $e \simeq 2,71828$ donc $2,7 < e < 2,8$. Ainsi, $5,1 < 3e < 8,4$ puis $2 < \sqrt{5,1} < \sqrt{3e} < \sqrt{8,4} < 3$ ce qui prouve que $\boxed{f(3e) = \lfloor 3e \rfloor = 2.}$
5. (a) La fonction partie entière étant à valeurs dans $\mathbb{Z}$, il en est de même de la fonction f. Puisque $\pi \notin \mathbb{Z}$, $\boxed{\text{l'équation}\, f(x) = \pi \,\text{n'admet pas de solution sur}\, \mathcal{D}_f.}$
   (b) La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc pour tout $x \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+$, puisque $x \geqslant 0$, on a $f(x) \geqslant f(0) = 0$ donc $\boxed{\text{l'équation}\, f(x) = -1 \,\text{n'admet pas de solution sur}\, \mathcal{D}_f.}$
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a les équivalences suivantes :

$$f(x)=n \Leftrightarrow \lfloor \sqrt{x} \rfloor = n \Leftrightarrow n \leqslant \sqrt{x} < n+1 \Leftrightarrow n^2 \leqslant x < (n+1)^2$$

par stricte croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'équation } f(x)=n \text{ est } [n^2,(n+1)^2[.}$

6. Comme vu précédemment, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \in \mathbb{Z}$ et $f(x) \geqslant 0$ donc $f(x) \in \mathbb{N}$, ce qui prouve que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{N}$.
   Montrons l'inclusion réciproque. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, pour tout $x \in [n^2,(n+1)^2[\subset \mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+$, on a $f(x)=n$ donc $n \in \mathrm{Im}(f)$, ce qui prouve l'inclusion réciproque $\mathbb{N} \subset \mathrm{Im}(f)$, et finalement l'égalité $\boxed{\mathrm{Im}(f)=\mathbb{N}.}$

   $\boxed{\text{L'application } f \text{ n'est pas injective}}$ car, toujours d'après la question précédente, pour tout $x \in [0,1[$, $f(x)=0$ donc, par exemple, $f(0)=f(\frac{1}{2})=0$.
7. D'après la question 5.d, on a pour tout $x \in [0,1[$, $f(x)=0$, pour tout $x \in [1,4[$, $f(x)=1$, pour tout $x \in [4,9[$, $f(x)=2$ et pour tout $x \in [9,10[\subset [9,16[$, $f(x)=3$.
8. Par définition de la partie entière, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f(n) = \lfloor \sqrt{n} \rfloor \leqslant \sqrt{n} < \lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1 = f(n)+1,$$

   d'où en encadrant $f(n)$, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n}-1 < f(n) \leqslant \sqrt{n}.}$
9. (a) D'après la question précédente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n} < f(n)+1 \leqslant \sqrt{n}+1$ d'où en divisant par $\sqrt{n}>0$, on obtient $1 < \dfrac{f(n)+1}{\sqrt{n}} \leqslant 1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
   Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n} \geqslant 1$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 1$.
   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 1 < \dfrac{f(n)+1}{\sqrt{n}} \leqslant 2$, ce qui prouve que l'ensemble A est borné. En conséquence, $\boxed{A \text{ admet une borne supérieure et une borne inférieure.}}$

   (b) On a pour tout $x \in A, x \leqslant 2$ et pour $n=1$, $\dfrac{f(1)+1}{\sqrt{1}} = 2$. Ainsi, 2 est un élément de A qui est un majorant de A.
   On en déduit que $\boxed{2=\sup(A)=\max(A).}$

   (c) D'après la question 9.(a), on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 1 < \dfrac{f(n)+1}{\sqrt{n}} \leqslant 1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
   Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 1$.
   D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{f(n)+1}{\sqrt{n}} = 1 = l.}$

   (d) D'une part, on sait que pour tout $x \in A$, $f(x) > 1$.
   D'autre part, puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{f(n)+1}{\sqrt{n}} = 1$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $1 < \dfrac{f(n)+1}{\sqrt{n}} < 1+\varepsilon$.
   Autrement dit, on a $\begin{cases} \forall x \in A, 1 < x \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, 1 < x < 1+\varepsilon \end{cases}$, ce qui prouve que $\boxed{l=1=\inf(A)}$.
   Néanmoins, puisque pour tout $x \in A, 1 < x, 1$ n'est pas un élément de A, i.e. la borne inférieure de A n'appartient pas à A.
   On en conclut que $\boxed{A \text{ n'admet pas de minimum.}}$

Problème

1. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n$.
   • **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a $p_1q_0 - p_0q_1 = a_0a_1 + 1 - a_0a_1 = 1 = (-1)^0$, ce qui prouve la propriété au rang $n = 0$.
   • **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que la propriété est vraie au rang n, i.e. $p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$, i.e. $p_{n+2}q_{n+1} - p_{n+1}q_{n+2} = (-1)^{n+1}$.
   Par définition de la suite, on a

$$\begin{aligned} p_{n+2}q_{n+1} - p_{n+1}q_{n+2} &= (a_{n+2}p_{n+1} + p_n)q_{n+1} - p_{n+1}(a_{n+2}q_{n+1} + q_n) \\ &= -(p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1}) \\ &= -(-1)^n \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= (-1)^{n+1}, \end{aligned}$$

   ce qui prouve la propriété au rang $n+1$.
   D'après le principe de récurrence, on a bien montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n.}$$

2. (a) C'est un trinôme du second degré de discriminant $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-1) = 5 > 0$. Il possède donc deux racines réelles distinctes que sont $\boxed{\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0}$ et $\boxed{\varphi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0}$. $\boxed{\varphi \text{ est le nombre d'or.}}$
   (b) Puisque φ et φ' sont solutions de $x^2 - x - 1 = 0$, d'après les relations cœfficients-racines, on a $\boxed{\varphi + \varphi' = 1}$ et $\boxed{\varphi\varphi' = -1}$.
   (c) On a $\left|\frac{\varphi'}{\varphi}\right| = \left|\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right| = \frac{\sqrt{5}-1}{1+\sqrt{5}}$.
   Or, $0 < \sqrt{5} - 1 < \sqrt{5} + 1$ donc $\frac{\sqrt{5}-1}{1+\sqrt{5}} < 1$, ce qui prouve que $\boxed{\left|\frac{\varphi'}{\varphi}\right| < 1.}$

3. (a) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n = \varphi$.
   • **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a bien $x_0 = \varphi$, ce qui prouve la propriété au rang $n = 0$.
   • **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $x_n = \varphi$. Montrons que $x_{n+1} = \varphi$.
   Par définition, on a $x_{n+1} = \frac{1}{x_n - \lfloor x_n \rfloor}$. Or, par hypothèse de récurrence, $x_n = \varphi$ donc $x_{n+1} = \frac{1}{\varphi - \lfloor \varphi \rfloor}$.
   Puisque $2 < \sqrt{5} < 3$, on a $3 < 1 + \sqrt{5} < 4$ puis $1 \leqslant \frac{3}{2} < \varphi < 2$ donc $\lfloor \varphi \rfloor = 1$.
   Ainsi, $x_{n+1} = \frac{1}{\varphi - 1}$.
   D'après la question 2.b), on a

$$x_{n+1} = \frac{1}{\varphi - 1} = -\frac{1}{\varphi'} = \varphi,$$

   ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout}\, n \in \mathbb{N}, x_n = \varphi.}$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}, a_n = \lfloor x_n \rfloor = \lfloor \varphi \rfloor$ donc $\boxed{\text{pour tout}\, n \in \mathbb{N}, a_n = 1.}$

(b) Montrons par récurrence de pas double que pour tout $n \in \mathbb{N}, q_n > 0$.

• **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a $q_0 = 1 > 0$ et pour $n = 1, q_1 = a_1 = 1$ d'après la question précédente donc la propriété est vraie aux rangs $n = 0$ et $n = 1$.

• **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $q_n > 0$ et $q_{n+1} > 0$.

Alors $q_{n+2} = a_{n+2}q_{n+1} + q_n = q_{n+1} + q_n > 0$ comme somme de termes strictement positifs donc la propriété est vraie au rang $n + 2$.

Par récurrence de pas double, on a bien montré que $\boxed{\text{pour tout}\, n \in \mathbb{N}, q_n > 0.}$

(c) Montrons par une récurrence de pas double que pour tout $n \in \mathbb{N}, p_n = q_{n+1}$.

• **Initialisation** : Pour $n = 0$, on a $p_0 = 1$ et $q_1 = a_1 = 1$ d'après la question 3.a) donc $p_0 = q_1$, ce qui prouve la propriété au rang $n = 0$.

Pour $n = 1$, on a $q_2 = a_2q_1 + q_0 = 1 + 1 = 2$ et $p_1 = a_0a_1 + 1 = 2$ donc $p_1 = q_2$, ce qui prouve la propriété au rang $n = 1$.

• **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que la propriété est vraie aux rangs n et $n+1$ i.e. $p_n = q_{n+1}$ et $p_{n+1} = q_{n+2}$. Montrons qu'elle est vraie au rang $n + 2$, i.e. $p_{n+2} = q_{n+3}$.

Par définition, on a en utilisant la question 3.a) et l'hypothèse de récurrence :

$$p_{n+2} = a_{n+2}p_{n+1} + p_n = a_{n+3}q_{n+2} + q_{n+1} = q_{n+3},$$

ce qui prouve la propriété au rang $n + 2$, et achève la récurrence.

D'après le principe de récurrence de pas double, on a $\boxed{\text{pour tout}\, n \in \mathbb{N}, p_n = q_{n+1}.}$

(d) Montrons par une récurrence de pas double que pour tout $n \in \mathbb{N}, q_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+1} - \varphi'^{n+1}\right)$.

• **Initialisation :**

Pour $n = 0$, on a $\dfrac{1}{\sqrt{5}}(\varphi - \varphi') = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1 = q_0$.

Pour $n = 1$, on a $\sqrt{5}\left(\varphi^2 - \varphi'^2\right)$. Or, $\varphi^2 = \varphi + 1$ et $\varphi'^2 = \varphi' + 1$ puisque φ et φ' sont solutions de (E) donc $\dfrac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^2 - \varphi'^2) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\varphi - \varphi') = 1 = q_1$.

La propriété est donc vraie aux rangs $n = 0$ et $n = 1$.

• **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que la propriété est vraie aux rangs n et $n + 1$. Montrons qu'elle est vraie au rang $n + 2$.

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}, a_n = 1$ on a

$$\begin{aligned}
q_{n+2} &= q_{n+1} + q_n \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+2} - \varphi'^{n+2} + \varphi^{n+1} - \varphi'^{n+1}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1}(\varphi + 1) - \varphi'^{n+1}(\varphi' + 1)) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1} \times \varphi^2 - \varphi'^{n+1} \times \varphi'^2) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+3} - \varphi'^{n+3}),
\end{aligned}$$

ce qui prouve la formule au rang $n + 2$ et achève la récurrence.

On a donc $\boxed{\text{pour tout}\, n \in \mathbb{N}, q_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1} - \varphi'^{n+1}).}$

D'après la question précédente, on a alors $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, p_n = q_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+2} - \varphi'^{n+2}).}$

(e) On sait d'après la question 3.b) que pour tout $n \in \mathbb{N}, q_n \neq 0$. On peut donc diviser par q_n et d'après la question précédente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{\varphi^{n+2} - \varphi'^{n+2}}{\varphi^{n+1} - \varphi'^{n+1}} = \frac{\varphi^{n+2}}{\varphi^{n+1}} \frac{1 - \frac{\varphi'^{n+2}}{\varphi^{n+2}}}{1 - \frac{\varphi'^{n+1}}{\varphi^{n+1}}} = \varphi \times \frac{1 - \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^{n+2}}{1 - \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^{n+1}}.$$

Or, d'après la question 2.c), on sait que $\left|\frac{\varphi'}{\varphi}\right| < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^{n+2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^{n+1} = 0$.

Par opérations sur les limites, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1 - \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^{n+2}}{1 - \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^{n+1}} = 1$ d'où, par multiplication, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{p_n}{q_n} = \varphi.}$