Lycée Fénelon
Année 2024-2025

BCPST1
A. Panetta

Devoir surveillé de mathématiques n°1

Samedi 21 septembre 2024 (2h00)

L'énoncé est constitué de trois exercices, d'un problème et comporte 3 pages.
Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, la précision et la concision de la rédaction. Le soin de la copie ainsi que l'orthographe entreront également pour une part importante dans l'appréciation du travail rendu.
Les résultats doivent être encadrés.
Si un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)$.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{k+1}3^{-2k.}$
3. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} \frac{i^2}{j+1}$.
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+2)}$.

Exercice 2

Soient $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 2x+y+1=0\}$ et $B = \{(-t, 2t-1), t \in \mathbb{R}\}$.
Montrer que $A = B$.

Exercice 3

Soit $f : x \mapsto \lfloor \sqrt{x} \rfloor$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Calculer $f(n^2)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
3. Montrer que f est monotone, en précisant sa monotonie.
4. Calculer $f(0), f(3), f(4\pi)$ et $f(3e)$.
5. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathcal{D}_f$:
   (a) $f(x) = \pi$;
   (b) $f(x) = -1$.
   (c) $f(x) = n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
6. Déterminer l'image de l'application f. L'application f est-elle injective ?
7. Tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0, 10]$.
8. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sqrt{n} - 1 < f(n) \leqslant \sqrt{n}.$$

On note $A = \left\{ \dfrac{f(n)+1}{\sqrt{n}}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

9. (a) Justifier que A admet une borne supérieure et une borne inférieure.
   (b) Déterminer la borne supérieure de A. Est-ce un maximum ?
   (c) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)+1}{\sqrt{n}}$. On notera l cette limite.
   (d) Démontrer que l est la borne inférieure de A. Est-ce un minimum ?

Problème

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels non nuls. On pose $p_0 = a_0, q_0 = 1, p_1 = a_0a_1+1, q_1 = a_1$ et l'on considère les suites d'entiers naturels non nuls $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = a_{n+1}p_n + p_{n-1} \quad \text{et} \quad q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n$.
2. (a) Trouver les solutions réelles de l'équation

$$(E) : x^2 - x - 1 = 0.$$

   On notera φ la solution positive de (E) et φ' la solution négative de (E). Comment s'appelle le nombre φ ?

   (b) Sans calcul, donner les valeurs de $\varphi + \varphi'$ et de $\varphi\varphi'$.

   (c) Vérifier que $\left|\dfrac{\varphi'}{\varphi}\right| < 1$.
3. On pose $x_0 = \varphi$ et, tant que cela garde un sens, on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \frac{1}{x_n - \lfloor x_n \rfloor}.$$

   Dans cette question, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}, a_n = \lfloor x_n \rfloor$.

   (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n = \varphi$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, a_n = 1$.

   (b) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}, q_n > 0$.

   (c) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, p_n = q_{n+1}$.

   (d) Démontrer à l'aide d'une récurrence de pas double que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$q_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+1} - \varphi'^{n+1}\right) \text{ et } p_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+2} - \varphi'^{n+2}\right).$$

   (e) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}, \dfrac{p_n}{q_n} = \varphi \times \dfrac{1 - \left(\dfrac{\varphi'}{\varphi}\right)^{n+2}}{1 - \left(\dfrac{\varphi'}{\varphi}\right)^{n+1}}$ et en déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{p_n}{q_n} = \varphi$.