

---

DEVOIR MAISON N°2  
À RENDRE POUR LE VENDREDI 4 OCTOBRE 2024

---

## Image réciproque d'un ensemble par une application

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles. On considère  $f : E \rightarrow F$  une application.

Pour tout  $A \subset F$ , on pose  $f^*(A) = \{x \in E, f(x) \in A\} \subset E$  l'ensemble des éléments de  $E$  dont les images appartiennent à  $A$ , c'est à dire l'ensemble des antécédents des éléments de  $A$ . On appelle  $f^*(A)$  l'image réciproque de  $A$  par  $f$ .

Autrement dit,  $x \in f^*(A) \Leftrightarrow f(x) \in A$ .

Par exemple, pour l'application  $f : x \mapsto x^2$ ,  $f^*([0; 1]) = [-1; 1]$ .

Ce problème est constitué de trois parties. La troisième partie repose sur les résultats de la première partie (questions 4 et 5) mais la deuxième partie peut se traiter de façon indépendante.

### I. Généralités

1. Calculer  $f^*(F)$ ,  $f^*(\text{Im}(f))$  et  $f^*(\emptyset)$ .
2. Montrer que pour toute partie  $A \subset F$ ,  $f^*(\overline{A}) = \overline{f^*(A)}$ .
3. Soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $F$ .
  - (a) Montrer que  $f^*(A \cup B) = f^*(A) \cup f^*(B)$ .
  - (b) Montrer que  $f^*(A \cap B) = f^*(A) \cap f^*(B)$ .
  - (c) Montrer que  $f^*(A \setminus B) = f^*(A) \setminus f^*(B)$ .
4.
  - (a) Montrer que pour toute partie  $A \subset F$ ,  $f(f^*(A)) = A \cap \text{Im}(f)$ .
  - (b) Montrer que  $f$  est surjective si et seulement si  $\forall A \subset F$ ,  $f(f^*(A)) = A$ .
5.
  - (a) Montrer que pour toute partie  $X \subset E$ ,  $X \subset f^*(f(X))$ .
  - (b) Montrer que  $f$  est injective si et seulement si  $\forall X \subset E$ ,  $X = f^*(f(X))$ .
6. Soit  $G$  un ensemble et  $g : F \rightarrow G$  une application.  
Montrer que pour toute partie  $A \subset G$ ,  $(g \circ f)^*(A) = f^*(g^*(A))$ .

### II. Etude d'un exemple

On considère l'application

$$f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1}$$

où  $\mathcal{D}$  désigne le domaine de définition de  $f$ .

1. Déterminer l'ensemble  $\mathcal{D}$ .
2. Dresser le tableau de variation de  $f$  et calculer  $\text{Im}(f)$ . L'application  $f$  est-elle surjective ?
3. L'application  $f$  est-elle injective ?
4. A l'aide du tableau de variation de  $f$ , expliciter les ensembles suivants :

$$(a) f^*({0}); \quad (b) f^*({1}); \quad (c) f(f^*([0; 1])); \quad (d) f^*(f([-\frac{1}{2}; 0])).$$

5. En déduire des parties  $A \subset \mathbb{R}$  et  $X \subset \mathcal{D}$  telles que  $f(f^*(A)) \neq A$  et  $f^*(f(X)) \neq X$ .

### III. Application image réciproque

On reprend le cadre général de la première partie, à savoir une application  $f : E \rightarrow F$ . On définit l'application

$$\begin{aligned} f^* : \mathcal{P}(F) &\longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ A &\longmapsto f^*(A). \end{aligned}$$

1. Montrer que  $f^*$  est injective si et seulement si  $f$  est surjective.
2. Montrer que  $f^*$  est surjective si et seulement si  $f$  est injective.