Corrigé de la liste d'exercices n°4 — Applications

Exercice 1.

1. Puisque f est continue et croissante sur $[2,5]$, on a $f([2,5]) = [f(2), f(5)] = [7, 28]$.
2. On a $f([-2,5]) = f([-2,0] \cup [0,5]) = f([-2,0]) \cup f([0,5])$.
   Puisque f est continue et décroissante sur $[-2,0]$, alors $f([-2,0]) = [f(0), f(-2)] = [3,7]$.
   Puisque f est continue et croissante sur $[0,5]$, alors $f([0,5]) = [f(0), f(5)] = [3,28]$.
   Ainsi, $f([-2,5]) = [3,7] \cup [3,28] = [3,28]$.
3. • Si $a \leqslant b \leqslant 0$, puisque f est décroissante et continue sur $\mathbb{R}_-$, alors f est décroissante et continue sur $[a,b]$ donc
   $$f([a,b]) = [f(b), f(a)] = [b^2+3, a^2+3].$$
   • Si $0 \leqslant a \leqslant b$, puisque f est croissante et continue sur $\mathbb{R}_+$, alors f est croissante et continue sur $[a,b]$ donc
   $$f([a,b]) = [f(a), f(b)] = [a^2+3, b^2+3].$$
   • Si $a \leqslant 0 \leqslant b$, alors $f([a,b]) = f([a,0]) \cup f([0,b])$.
   Puisque f est décroissante et continue sur $[a,0]$, alors $f([a,0]) = [f(0), f(a)] = [3, a^2+3]$.
   Puisque f est croissante et continue sur $[0,b]$, alors $f([0,b]) = [f(0), f(b)] = [3, b^2+3]$.
   Ainsi, $f([a,b]) = [3, a^2+3] \cup [3, b^2+3] = [3, \max(a^2+3, b^2+3)]$.
   - Si $|a| \leqslant |b|$, alors $a^2 \leqslant b^2$ donc $f([a,b]) = [3, b^2+3]$.
   - Si $|a| \geqslant |b|$, alors $a^2 \geqslant b^2$ donc $f([a,b]) = [3, a^2+3]$.

Exercice 2.

1. $\ln(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$.
2. $\ln([1,e]) = [0,1]$.
3. $\cos\left(\left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]\right) = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$.
4. $$\begin{aligned} \tan\left(\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{15\pi}{2}, \frac{31\pi}{4}\right]\right) &= \tan\left(\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\right) \cup \tan\left(\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]\right) \\ &=]-1, +\infty[\cup]-\infty, -1[\\ &= \mathbb{R} \setminus \{-1\}. \end{aligned}$$

Exercice 3.

1. La fonction f est définie pour tout réel x tel que $x^2 - 3x + 3 \geqslant 0$.
   Ce trinôme du second degré a un discriminant égal à $\Delta = -3 < 0$ donc il est toujours du signe du cœfficient dominant, c'est à dire strictement positif. Ainsi, pour tout réel x, $x^2 - 3x + 3 \geqslant 0$, ce qui montre que la fonction f est définie sur $E = \mathbb{R}$.

2. On a pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 3} = \sqrt{(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4}}$.
   On a pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant f(\frac{3}{2}) = \sqrt{\frac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   Par ailleurs, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
   Puisque f est continue sur $\mathbb{R}, \mathrm{Im}(f) = f(\mathbb{R})$ est un intervalle donc $f(\mathbb{R}) = \left[\dfrac{\sqrt{3}}{2}, +\infty\right[$.

Exercice 4.

1. Soit $x \in E$.
   On a $\mathbb{1}_{\overline{A}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si}\, x \in \overline{A} \\ 0 & \text{si}\, x \notin \overline{A} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si}\, x \notin A \\ 0 & \text{si}\, x \in A \end{cases} = 1 - \mathbb{1}_A(x)$.
2. Soit $x \in E$.
   On a $\mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{si}\, x \in A\, \text{et}\, x \in B \\ 0 & \text{si}\, x \notin A\, \text{ou}\, x \notin B \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si}\, x \in A \cap B \\ 0 & \text{si}\, x \in \overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B} \end{cases} = \mathbb{1}_{A \cap B}(x)$.
3. $\mathbb{1}_{A \cup B} = 1 - \mathbb{1}_{\overline{A \cup B}} = 1 - \mathbb{1}_{\overline{A} \cap \overline{B}} = 1 - \mathbb{1}_{\overline{A}}\mathbb{1}_{\overline{B}} = 1 - (1 - \mathbb{1}_A)(1 - \mathbb{1}_B) = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$.
4. $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B = 0 \Leftrightarrow \mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_{\emptyset} \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.
5. On a $A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$. Puisque cette union est disjointe, on a d'après la question précédente

   $$\mathbb{1}_{A \Delta B} = \mathbb{1}_{A \cap \overline{B}} + \mathbb{1}_{B \cap \overline{A}} = \mathbb{1}_A\mathbb{1}_{\overline{B}} + \mathbb{1}_B\mathbb{1}_{\overline{A}} = \mathbb{1}_A(1 - \mathbb{1}_B) + \mathbb{1}_B(1 - \mathbb{1}_A) = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B.$$

   D'autre part, $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B = \mathbb{1}_A^2 + \mathbb{1}_B^2 - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B = (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B)^2 = |\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B|$ puisque $\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B$ est à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$.

Exercice 5.

1. La fonction f est bijective de réciproque $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{2} \end{array}$.
2. La fonction f est surjective mais n'est pas injective.
3. La fonction f n'est ni injective ni surjective ($\mathrm{Im}(f) = \mathbb{Z}$).
4. Remarquons tout d'abord que pour tout $x \in [0, 1[, f(x) = x \in [0, 1[$ et pour tout $x \in [1, 2], f(x) = 3 - x \in [1, 2]$.
   Soit $y \in [0, 2]$.
   • Si $y \in [0, 1[$, alors $f(x) = y \Leftrightarrow x = y$.
   • Si $y \in [1, 2]$, on a $f(x) = y \Leftrightarrow 3 - x = y \Leftrightarrow x = 3 - y$.
   Finalement, $\forall y \in [0, 2], \exists! x \in [0, 2], f(x) = y$ et on a pour tout $y \in [0, 2]$,

   $$f^{-1}(y) = \begin{cases} y & \text{si}\, y \in [0, 1[] \\ 3 - y & \text{si}\, y \in [1, 2] \end{cases} = f(y)$$

   donc f est bijective et $f^{-1} = f$.

Exercice 6.

1. On a pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 3x + 3 & \text{si}\, x \geqslant \dfrac{1}{3} \\ 5 - 3x & \text{si}\, x \leqslant \dfrac{1}{3} \end{cases}$.
   L'application f n'est pas surjective car pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant 4$. Elle n'est pas non plus injective car $f(1) = f(-\frac{1}{3}) = 6$.
2. L'application f est strictement décroissante sur $[-\infty, \frac{1}{3}]$ à valeurs dans $[4, +\infty[$ et strictement croissante sur $[\frac{1}{3}, +\infty[$ à valeurs dans $[4, +\infty[$.
   Ainsi, f est bijective de $[\frac{1}{3}, +\infty[$ sur $[4, +\infty[$.

Exercice 7.

1. $E = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
2. Soit $y \in \mathbb{R}$. On a $y = g(x) \Leftrightarrow \dfrac{x+2}{x-1} = y \Leftrightarrow x+2 = y(x-1) \Leftrightarrow x(y-1) = y+2$.
   • Si $y = 1$, ceci équivaut à $0 = 3$, ce qui est absurde donc 1 n'admet pas d'antécédent par g.
   • Si $y \neq 1$, ceci équivaut à $x = \dfrac{y+2}{y-1}$.
3. On a $g(E) = E$ et pour tout $y \in E, y$ admet un unique antécédent x par g qui est $g(y)$, ce qui prouve que g est bijective de E sur $g(E)$.
   Ainsi, pour tout $y \in g(E) = E, g(x) = y \Leftrightarrow x = g(y)$ ce qui prouve que $g^{-1} = g$.

Exercice 8. Soit $f\colon x \longmapsto \dfrac{2x+1}{x-2}$.

1. $E = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
2. Soit $y \in \mathbb{R}$. Cherchons les solutions $x \in E$ de l'équation $f(x) = y$. On a
   $$\frac{2x+1}{x-2} = y \Leftrightarrow 2x+1 = (x-2)y \Leftrightarrow 2x+1 = xy-2y \Leftrightarrow x(2-y) = -1-2y.$$
   • Si $y = 2$, ceci équivaut à $0 = -3$, ce qui est absurde. Donc l'équation $f(x) = y$ n'admet pas de solution pour $y = 2$.
   • On suppose dorénavant que $y \neq 2$. On a alors
   $$f(x) = y \Leftrightarrow x = \frac{-1-2y}{2-y} = \frac{2y+1}{y-2} = f(y).$$
   Ainsi, pour tout $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution $x = f(y)$.
   Ceci implique que f est bijective sur de E sur E et vérifie $f^{-1} = f$.

Exercice 9.

1. On a $f(x,y,z) = (a,b,c) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & a \\ x+y & = & b \\ 2x+2y+z & = & c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & a \\ y & = & b-a \\ z & = & c-2b \end{array}\right.$
2. Tout élément $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ admet un unique antécédent par f qui est $(a, b-a, c-2b)$ donc f est bijective de bijection réciproque $f^{-1}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (a,b,c) & \longmapsto & (a, b-a, c-2b). \end{array}$
3. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.
   On a $g(x,y,z) = (a,b,c) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+z & = & a \\ y+z & = & b \\ x+3y+4z & = & c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & a-z \\ y & = & b-z \\ a+3b & = & c \end{array}\right.$
   • Si $a+3b \neq c$, alors (a,b,c) n'admet pas d'antécédent par f, donc f n'est pas surjective.
   • Si $a+3b = c$, alors pour tout réel $z, (a-z, b-z, z)$ est un antécédent de (a,b,c), donc dans ce cas, (a,b,c) admet une infinité d'antécédents, ce qui prouve que f n'est pas injective.
   Ainsi, f n'est pas bijective.

Exercice 10.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $g \circ f(n) = g(n+1)$.
   Or, pour tout $n \in \mathbb{N}, n+1 \neq 0$ donc $g(n+1) = n+1-1 = n$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}, g \circ f(n) = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.
2. Cependant, f n'est pas bijective puisque $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{N}^*$ donc f n'est pas surjective.

Exercice 11. Raisonnons par analyse-synthèse.
• **Analyse :** Soit $f : E \longrightarrow E$ une application telle que pour toute application $g : E \longrightarrow E$, on ait $g \circ f = f \circ g$.
Soit $a \in E$. Considérons l'application $g : E \longrightarrow E$ constante égale à a.
L'hypothèse $g \circ f = f \circ g$ entraîne pour tout $x \in E$, $g \circ f(x) = f \circ g(x) \Leftrightarrow a = f(a)$. Ceci étant vrai pour tout élément $a \in E$, on a nécessairement $f = \mathrm{Id}_E$.
• **Synthèse :** Soit $f = \mathrm{Id}_E$. Alors pour toute application $g : E \longrightarrow E$, on a

$$g \circ f = g \circ \mathrm{Id}_E = g = \mathrm{Id}_E \circ g = f \circ g.$$

Finalement, la seule application f qui commute avec toutes les applications $g : E \longrightarrow E$ est $f = \mathrm{Id}_E$.

Exercice 12.

1. • **Première méthode :** Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective. Or, par hypothèse, g est injective donc g est bijective.
   Soit $g^{-1} : G \longrightarrow F$ la bijection réciproque de g. Alors $g^{-1} \circ (g \circ f) = f$ est surjective comme composée d'applications surjectives.
   • **Deuxième méthode :** Soit $y \in F$. Alors $g(y) \in G$.
   Puisque $g \circ f : E \longrightarrow G$ est surjective, alors il existe $x \in E$ tel que $g(y) = g \circ f(x) = g(f(x))$.
   Puisque g est injective, $g(y) = g(f(x))$ implique que $y = f(x)$, d'où $y \in \mathrm{Im}(f)$.
   Ainsi, tout élément y de F admet un antécédent par f, ce qui prouve que f est surjective.
2. • **Première méthode :** Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective. Or, par hypothèse, f est surjective, donc f est bijective.
   Soit $f^{-1} : F \longrightarrow E$ la bijection réciproque de f. Alors $(g \circ f) \circ f^{-1} = g$ est injective comme composée d'applications injectives.
   • **Première méthode :** Soit $(y, y') \in F^2$ tels que $g(y) = g(y')$. Puisque $f : E \longrightarrow F$ est surjective, il existe $(x, x') \in E^2$ tels que $f(x) = y$ et $f(x') = y'$.
   Ainsi, $g(y) = g(y') \Rightarrow g \circ f(x) = g \circ f(x')$.
   Or, $g \circ f$ est injective donc $g \circ f(x) = g \circ f(x') \Rightarrow x = x' \Rightarrow f(x) = f(x')$, i.e. $y = y'$.
   Ainsi, $g(y) = g(y') \Rightarrow y = y'$, ce qui prouve que g est injective.

Exercice 13. • Supposons que f est injective. Soient A et B des parties de E.
On a vu en cours que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
Montrons l'inclusion $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.
Soit $y \in f(A) \cap f(B)$. Alors il existe $x \in A$ et $x' \in B$ tels que $f(x) = f(x') = y$. Puisque f est injective, on a nécessairement $x = x'$ donc $x \in A \cap B$. Ainsi, $y = f(x) \in f(A \cap B)$, ce qui prouve que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.
Finalement, on a bien $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$, et ce pour toutes parties A et B de E.
• Supposons que pour toutes parties A et B de E, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
Montrons que f est injective. Pour cela, considérons deux éléments $(x, x') \in E^2$ tels que $x \neq x'$ et montrons que $f(x) \neq f(x')$.
Soit $A = \{x\}$ et $B = \{x'\}$. On a $A \cap B = \emptyset$ puisque $x \neq x'$, donc $f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$.
Or, par hypothèse, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) = f(\{x\}) \cap f(\{x'\}) = \{f(x)\} \cap \{f(x')\}$ donc $\{f(x)\} \cap \{f(x')\} = \emptyset$, ce qui prouve que $f(x) \neq f(x')$.
On en conclut que f est injective.

Exercice 14. • Supposons que f est surjective.
Soit G un ensemble, et soient $g : F \longrightarrow G$ et $h : F \longrightarrow G$ deux applications telles que $g \circ f = h \circ f$.

Montrons que $g = h$.
Soit $y \in F$. Puisque f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$.
Puisque $g \circ f = h \circ f$, on a alors

$$g(y) = g \circ f(x) = h \circ f(x) = h(y)$$

et ce pour tout $y \in F$ donc $g = h$.
• Réciproquement, supposons que pour tout ensemble G et toutes applications $g, h : F \longrightarrow G, g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$.
Montrons par l'absurde que f est surjective. On suppose pour cela que f n'est pas surjective. Ceci implique qu'il existe un élément $y_0 \in F$ tel que $y_0 \notin f(E)$.
Posons $G = \{0, 1\}$. Considérons $g : F \longrightarrow G$ l'application constante égale à 1 et h l'application définie par

$$\begin{array}{rcl} h : F & \longrightarrow & G \\ y & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } y = y_0 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

Montrons que $g \circ f = h \circ f$.
Soit $x \in E$. Par définition de g, on a $g \circ f(x) = g(f(x)) = 1$.
Par ailleurs, puisque $f(x) \in f(E)$, on a $f(x) \neq y_0$ donc par définition de h, il vient $h \circ f(x) = h(f(x)) = 1$.
Ainsi, pour tout $x \in E, g \circ f(x) = h \circ f(x)$, ce qui implique que $g \circ f = h \circ f$. D'après l'hypothèse, ceci implique que $g = h$ donc h est l'application constante égale à 1! C'est absurde.
Nécessairement, f est surjective, ce qui prouve la deuxième implication, et donc l'équivalence.

Exercice 15. Soient $f : E \longrightarrow F, g : F \longrightarrow G$ et $h : G \longrightarrow H$ trois applications.
Supposons que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives.
Puisque $g \circ f$ est bijective, $g \circ f$ est surjective, donc g est surjective.
Puisque $h \circ g$ est bijective, $h \circ g$ est injective, donc g est injective.
Ainsi, g est surjective et injective, donc bijective. On peut donc considérer $g^{-1} : G \longrightarrow F$.
On a alors $g^{-1} \circ (g \circ f) = (g^{-1} \circ g) \circ f = \mathrm{Id}_F \circ f = f$.
Or, g^{-1} et $g \circ f$ sont bijectives, donc par composition $g^{-1} \circ (g \circ f) = f$ est bijective.
De même, on a $h \circ g \circ g^{-1} = h \circ \mathrm{Id}_G = h$ qui est bijective comme composée d'applications bijectives.
On peut donc en conclure que f, g et h sont bijectives.

Exercice 16. Soient $f : E \longrightarrow F, g : F \longrightarrow G$ et $h : G \longrightarrow E$ trois applications.
Supposons que $h \circ g \circ f$ et $g \circ f \circ h$ sont surjectives, tandis que $f \circ h \circ g$ est injective (les autres cas se traitent de manière analogue).
Puisque $g \circ (f \circ h)$ est surjective, on en déduit que g est surjective. De même, puisque $(f \circ h) \circ g$ est injective, on en déduit que g est injective.
Ainsi, g est bijective. Il existe donc $g^{-1} : G \longrightarrow F$.
Puisque $h \circ (g \circ f)$ est surjective, on en déduit que h est surjective.
Par ailleurs, par composition d'applications injectives, on déduit que $(f \circ h \circ g) \circ g^{-1}$ est injective.
Or,

$$(f \circ h \circ g) \circ g^{-1} = f \circ h \circ (g \circ g^{-1}) = f \circ h \circ \mathrm{Id}_G = f \circ h.$$

Ainsi, $f \circ h$ est injective, ce qui implique que h est injective.
Puisque h est injective et surjective, on en déduit que h est bijective et il existe donc $h^{-1} : E \longrightarrow G$.
Enfin, par composition d'applications surjectives, on a $g^{-1} \circ h^{-1} \circ (h \circ g \circ f) = f$ est surjective et par composition d'applications injectives, $(f \circ h \circ g) \circ g^{-1} \circ h^{-1} = f$ est injective, donc f est bijective.
On peut donc conclure que f, g et h sont bijectives.

Exercice 17. • Supposons que f est bijective. Soit $A \subset E$. Montrons que $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.
Puisque f est surjective, alors $f(E) = F$. Donc

$$f(A) \cup f(\overline{A}) = f(A \cup \overline{A}) = f(E) = F.$$

D'autre part, soit $y \in f(A) \cap f(\overline{A})$. Alors il existe $x \in A$ et $x \in \overline{A}$ tel que $f(x) = f(x') = y$.
Or, f est injective donc $x = x'$, ce qui entraîne que $x \in A \cap \overline{A} = \emptyset$, ce qui est absurde.
On a donc $f(A) \cap f(\overline{A}) = \emptyset$. L'union $f(A) \sqcup f(\overline{A}) = F$ est donc disjointe, ce qui prouve que $\overline{f(A)} = f(\overline{A})$, et ce pour toute partie $A \subset E$.
• Supposons que pour toute partie $A \subset E$, $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.
En particulier, pour $A = \emptyset$, on trouve $f(\overline{\emptyset}) = \overline{f(\emptyset)} \Leftrightarrow f(E) = \overline{\emptyset} \Leftrightarrow f(E) = F$, ce qui prouve que f est surjective.
Montrons maintenant que f est injective. Soit $x \in E$. Pour $A = \{x\}$, l'hypothèse entraîne que $f(E \backslash \{x\}) = F \backslash \{f(x)\}$. Ainsi, si $x' \neq x$, alors $x' \in E \backslash \{x\}$, donc $f(x') \in f(E \backslash \{x\}) = F \backslash \{f(x)\}$, d'où $f(x') \neq f(x)$, ce qui prouve que f est injective.
L'application f est donc bijective.

Exercice 18. Tout d'abord remarquons que si $A \subset X \subset A \cup B$, on a bien $A \cap B \subset X \cap B \subset B$ et si $A \cap B \subset Y \subset B$, alors $A \subset Y \cup A \subset A \cup B$.
Pour montrer que f et g sont des bijections réciproques l'une de l'autre, il faut montrer que

$$g \circ f = \mathrm{Id}_{[A, A \cup B]} \quad \text{et} \quad f \circ g = \mathrm{Id}_{[A \cap B, B]}.$$

Soit $X \in [A, A \cup B]$.
On a

$$g \circ f(X) = g(X \cap B) = (X \cap B) \cup A = (X \cup A) \cap (A \cup B).$$

Puisque $A \subset X$, on a $X \cup A = X$, donc $g \circ f(X) = X \cap (A \cup B) = X$ car $X \subset A \cup B$.
Ainsi, pour tout $X \in [A, A \cup B]$, on a $g \circ f(X) = X$ donc on a bien $g \circ f = \mathrm{Id}_{[A, A \cup B]}$.
De même, soit $Y \in [A \cap B, B]$. On a

$$f \circ g(Y) = f(Y \cup A) = (Y \cup A) \cap B = (Y \cap B) \cup (A \cap B).$$

Puisque $Y \subset B$, on a $Y \cap B = Y$ donc $f \circ g(Y) = Y \cup (A \cap B) = Y$ car $A \cap B \subset Y$.
Ainsi, pour tout $Y \in [A \cap B, B]$, on a $f \circ g(Y) = Y$ donc on a bien $f \circ g = \mathrm{Id}_{[A \cap B, B]}$.
On a donc bien $g \circ f = \mathrm{Id}_{[A, A \cup B]}$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_{[A \cap B, B]}$.
D'après le cours, ceci prouve bien que f est bijective et que $g = f^{-1}$.

Exercice 19. • Supposons que f est injective et montrons que f est surjective.
Soit $y \in E$. Puisque $f \circ f \circ f = f$, on a $f(f \circ f(y)) = f(y)$, ce qui implique par injectivité de f que $f(f(y)) = y$. En posant $x = f(y)$, on a bien $f(x) = y$ donc y admet un antécédent par f.
Ceci étant valable pour tout $y \in E$, on en déduit que f est surjective.
• Supposons que f est surjective et montrons que f est injective.
Soient $(x, y) \in E^2$ tels que $f(x) = f(y)$.
Puisque f est surjective, il existe $(a, b) \in E^2$ tels que $f(a) = x$ et $f(b) = y$. En composant par f, on obtient $f \circ f(a) = f(x) = f(y) = f \circ f(b)$ puis en composant de nouveau par f, on trouve $f \circ f \circ f(a) = f \circ f \circ f(b)$. Or, $f \circ f \circ f = f$, donc $f(a) = f(b)$, i.e. $x = y$, ce qui prouve que f est injective.
Remarque : ceci prouve en fait que sous l'hypothèse $f \circ f \circ f = f$, l'application f est injective si et seulement si elle est surjective si et seulement si elle est bijective et dans ce cas, en composant par f^{-1}, l'hypothèse $f \circ f \circ f = f$ donne $f \circ f = \mathrm{Id}_E$, d'où $f^{-1} = f$.

Exercice 20.

1. Puisque $x \mapsto x^3$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on en déduit que l'application $f \circ g$ est surjective et injective, ce qui implique d'après le cours que f est surjective et que g est injective.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a
$$g(x^3) = g(f \circ g(x)) = (g \circ f)(g(x)) = g(x)^2$$
et
$$f(x^2) = f(g \circ f(x)) = (f \circ g)(f(x)) = f(x)^3.$$
3. Tout d'abord, puisque g est injective d'après la première question, $g(-1), g(0)$ et $g(1)$ sont trois réels distincts deux à deux.

   D'après la question précédente, on a $g(-1)^2 = g((-1)^3) = g(-1), g(0)^2 = g(0^3) = g(0)$ et $g(1)^2 = g(1^3) = g(1)$.

   Ainsi, $g(-1), g(0), g(1)$ sont trois solutions différentes de l'équation $X^2 = X$ qui admet exactement deux solutions réelles : 0 et 1. On aboutit à une contradiction.

   Il ne peut donc pas exister de telles fonctions f et g.