Liste d'exercices n°6 — Trigonométrie

Exercice 1. Soient $(p,q)\in\mathbb{R}^2$. Montrer les formules suivantes :

1. $\cos(p)+\cos(q)=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.
2. $\cos(p)-\cos(q)=-2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$.
3. $\sin(p)+\sin(q)=2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.
4. $\sin(p)-\sin(q)=2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$.

Exercice 2. Montrer que pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que $a\not\equiv\frac{\pi}{2}[\pi], b\not\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$ et $a+b\not\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$, on a

$$\tan(a+b)=\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}.$$

En déduire la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 3. Soit $a\in\mathbb{R}$. Exprimer $\cos(3a),\cos(4a),\sin(3a),\sin(4a)$ en fonction de $\cos(a)$ et $\sin(a)$.

Exercice 4. Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$ puis sur $]-\pi;\pi]$.

1. $\sin(x)=-\sin\left(\frac{7\pi}{5}\right)$
2. $\sin(2x)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$
3. $\sin(3x)=\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$
4. $\sin(x)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$
5. $\cos(2x)=\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$
6. $\cos(x)=\sin\left(\frac{2x}{3}\right)$

Exercice 5. Résoudre les équations suivantes d'inconnue x réelle.

1. $\tan(x)=\sqrt{3}$
2. $\sin(2x)=\sqrt{3}$
3. $\sin(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$
4. $2\cos(3x)=1$
5. $\tan(2x)=-1$

Exercice 6. Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue x réelle.

1. $\sin(x)<\pi$
2. $\sin(x)\geq-\frac{\sqrt{2}}{2}$
3. $\sin(x)\leq-\frac{\sqrt{3}}{2}$
4. $\tan(x)>\sqrt{3}$
5. $\cos(x)\geq\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$
6. $\sin(x)\geq\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Exercice 7. Résoudre les équations suivantes d'inconnue x réelle.

1. $\sqrt{3}\sin(x) + \cos(x) = \sqrt{3}$
2. $\sqrt{3}\cos(7x) - \sin(7x) = 1$
3. $\cos(2x) - \sqrt{3}\sin(2x) = 2\cos(x)$
4. $2\cos^2(x) = 7\cos(x) - 3$
5. $\left\{\begin{array}{lcc} 2\sin(x) - 4\cos(x) & = & \sqrt{3}+2 \\ \sin(x) + \sqrt{3}\cos(x) & = & 0 \end{array}\right.$

Exercice 8. Comment doit-on choisir w pour que l'équation suivante

$$1 + \sin^2(wx) = \cos(x),$$

d'inconnue x réelle ait une unique solution ?

Exercice 9. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$,

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ chiffres } 2} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right).$$

Exercice 10. Soit θ un réel tel que $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ et $\theta \not\equiv \pi[2\pi]$.
On pose $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.
Montrer que

$$\cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin(\theta) = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \tan(\theta) = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Exercice 11. Résoudre l'équation $\cos^n(x) + \sin^n(x) = 1$, où n est un entier strictement positif.

Exercice 12. Soient a, b, c, d des éléments de $[0, \pi]$.

1. Montrer que $\sin(a) + \sin(b) \leq 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$.
2. En déduire que $\sin(a) + \sin(b) + \sin(c) + \sin(d) \leq 4\sin\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)$.
3. Montrer que $\sin(a) + \sin(b) + \sin(c) \leq 3\sin\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$.

Exercice 13. Calculer la somme suivante en fonction de θ et de n :

$$S = \sum_{k=1}^{n} \cos((2k-1)\theta).$$

(Indication : calculer $2\sin(\theta)S$ et faire apparaître une somme télescopique.)

Exercice 14. Calculer la somme suivante en fonction de θ et de n :

$$S = \sum_{k=0}^{n} \cos^2(k\theta).$$