

Devoir en temps libre n° 2

Circuit permettant de fixer une intensité minimale

On dispose d'un grand nombre de piles identiques, assimilables à des générateurs de Thévenin de force électromotrice $e = 9\text{ V}$ et de résistance interne $r = 3\ \Omega$, avec lesquelles on souhaite alimenter un appareil assimilable à un résistor de résistance $R_u = 50\ \Omega$.

1. Proposer un circuit, associant un nombre N de piles (à déterminer), permettant de faire circuler une intensité d'au moins 2 A dans l'appareil.
2. À partir du circuit précédent, peut-on augmenter indéfiniment l'intensité qui circule dans l'appareil ? Si oui, justifier. Si non, quelle est l'intensité maximale qui peut circuler ?

L'important est de réfléchir, et la démarche est aussi importante que les calculs.

- Identifier les montages possibles, sans chercher la complication.
- Identifier les grandeurs pertinentes.
- Identifier le calcul qu'il faudrait faire (même si on n'arrive pas à le faire).

Pour répondre, on devra commencer par établir une formule générale, puis il est possible :

- de faire le calcul pour différentes valeurs de N et obtenir une réponse plausible.
- de résoudre l'équation (ou encore mieux une inéquation),
- de faire une représentation graphique et de trouver la solution par lecture de la courbe,
- d'utiliser un programme Python soit pour tracer la courbe soit pour remplir un tableau de valeurs, soit pour trouver la réponse par itération.

Corrigé du devoir en temps libre n° 2

éléments de correction

1. On peut imaginer soit de monter N piles en série, soit de les monter en parallèle. Dans le cas où elles sont montées en série, les forces électromotrices s'additionnent (additivité des tensions) ainsi que les résistances internes (résistances en série) ; cela revient au schéma de la figure 1a.

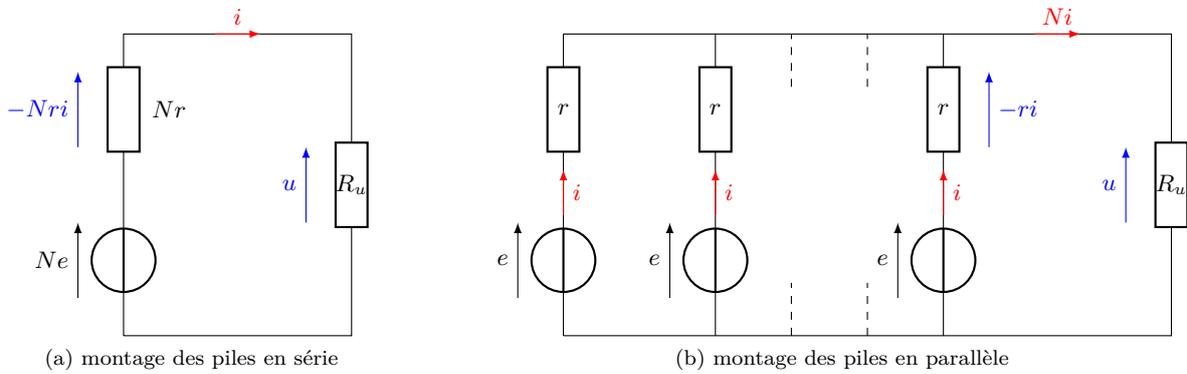


FIGURE 1 – Les deux montages possibles.

Dans le montage en série, la tension aux bornes de R_u est : $u = R_u i$. La loi des mailles s'écrit :

$$Ne - Nri - R_u i = 0 \Rightarrow i = \frac{Ne}{Nr + R_u}$$

Dans le montage de N piles en parallèle (figure 1b), elles sont toutes parcourues par la même intensité i puisqu'elles sont identiques et soumises à la même tension u . D'après la loi des nœuds, l'intensité qui parcourt R_u est donc Ni , et la tension à ses bornes est : $u = R_u Ni$. Appliquons la loi des mailles dans la maille de droite :

$$e - ri - R_u \times Ni = 0 \Rightarrow i = \frac{e}{r + NR_u}$$

Résolution par essai de la formule

Calculons i pour les valeurs successives de N , avec :

$$\text{série : } i_s = \frac{9N}{3N + 50} \qquad \text{parallèle : } i_p = \frac{9}{3 + 50N}$$

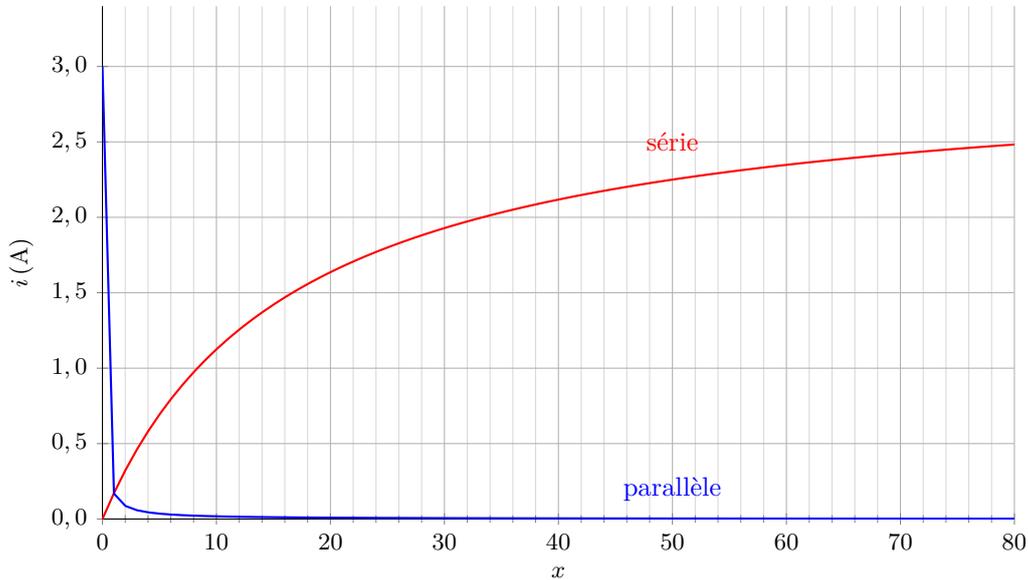
N	1	2	3	4	...	32	33	34
i_s (A)	0,18	0,32	0,45	0,58	...	1,97	1,99	2,01
i_p (A)	0,17	0,09	0,06	0,04	...	0,006	0,005	0,005

On constate qu'avec le montage des piles en série, on parvient à une intensité de 2 A au-delà de 34 piles. Avec le montage en parallèle, il semble qu'il n'y ait pas de solution, car l'intensité diminue quand le nombre de piles augmente.

Résolution graphique

Traçons les fonctions correspondant aux formules de i dans chacun des deux cas :

$$\text{série : } i(x) = \frac{9x}{3x + 50} \qquad \text{parallèle : } i(x) = \frac{9}{3 + 50x}$$



Attention ! le nombre de piles étant un entier, les points de la courbe qui ont un sens physique sont ceux qui correspondent à x entier ! En particulier, la partie de la courbe entre 0 et 1 ne correspond pas à une situation réelle !

La fonction donnant i dans le cas d'un montage en parallèle est décroissante et n'est jamais supérieure à 0,2 pour $x \geq 1$. Il n'y a donc aucune solution avec ce montage.

La fonction donnant i dans le cas d'un montage en série est croissante et devient supérieure à 2 pour $x \geq 34$.

Résolution par le calcul

Soit i_0 l'intensité qu'on souhaite faire circuler. Résolvons $i > i_0$ pour déterminer la valeur de N qui satisfait cette inégalité. Dans le cas du montage en série, on a :

$$i = \frac{Ne}{Nr + R_u} \geq i_0 \Rightarrow Ne \geq Nri_0 + R_u i_0 \Rightarrow N(e - ri_0) \geq R_u i_0$$

Comme dans notre circuit, $e - ri_0 = 9 - 3 \times 2 > 0$, l'inégalité ne change pas de sens lorsqu'on divise par ce terme :

$$N \geq \frac{R_u i_0}{e - ri_0} = \frac{50 \times 2}{9 - 3 \times 2} = 33,3$$

soit $N \geq 34$ piles.

Dans le cas du montage en parallèle, on a :

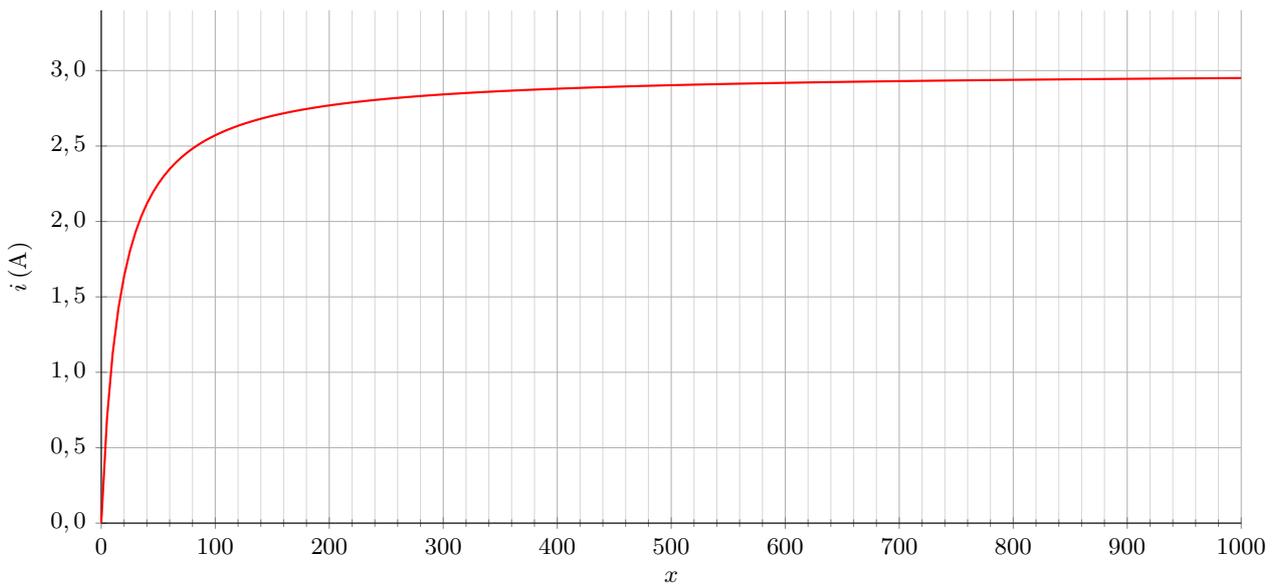
$$i = \frac{e}{r + NR_u} \geq i_0 \Rightarrow e \geq ri_0 + NR_u i_0 \Rightarrow (e - ri_0) \geq NR_u i_0 \Rightarrow N \leq \frac{e - ri_0}{R_u i_0}$$

ce qui donne $N \leq 3/100 = 0,3$. Le nombre de piles étant un entier, il n'y a aucune solution.

L'inégalité peut être résolue à l'aide d'un programme Python en réalisant une boucle `while`, qui calcule l'intensité pour les valeurs successives du nombre de piles jusqu'à atteindre $i = 2 \text{ A}$. Le programme conduit à $N = 34$ avec le circuit en série (ci-dessous). En revanche, si on écrit un programme analogue avec la formule donnant i pour le montage en parallèle, le programme ne s'arrête jamais.

```
1 i = 0
2 N = 0
3 e = 9
4 r = 3
5 Ru = 50
6
7 while i < 2 :
8     N = N+1
9     i = N*e / (Ru+N*r)
10
11 print( 'N_□=□' , N)
12 print( 'i_□=□' , i)
```

2. La question n'a de sens que pour le montage des piles en série. La courbe donnant i en fonction du nombre de piles croît de moins en moins vite lorsque le nombre de piles augmente. Si on la trace pour x allant jusqu'à 1000, il semble y avoir une asymptote horizontale pour $i = 3 \text{ A}$.



Ceci peut être retrouvé par le calcul :

$$i = \frac{Ne}{Nr + R_u} = \frac{e}{r + R_u/N}$$

Or $R_u/N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$, donc $i \xrightarrow{N \rightarrow \infty} e/r = 3 \text{ A}$. On ne peut donc pas faire croître i à l'infini ; l'intensité maximale possible vaut 3 A. Physiquement, cela est dû au fait qu'ajouter des piles ajoute des résistances dans le circuit.