
DEVOIR MAISON N°3
A RENDRE POUR LE VENDREDI 18 OCTOBRE 2024

Un calcul de somme

Soit n un entier naturel non nul. On cherche à calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^n k \binom{2n}{n+k}$.

1. Calculer S_1, S_2 et S_3 .

2. Montrer que $S_n = \sum_{j=n}^{2n} j \binom{2n}{j} - n \sum_{j=n}^{2n} \binom{2n}{j}$.

3. Justifier que pour tout $j \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$, on a $j \binom{2n}{j} = 2n \binom{2n-1}{j-1}$.

4. En déduire que $S_n = n \sum_{j=n}^{2n} \binom{2n-1}{j-1} + n \sum_{j=n}^{2n} \left(\binom{2n-1}{j-1} - \binom{2n}{j} \right)$.

5. Pour tout $j \in \llbracket n, 2n \rrbracket$, exprimer $\binom{2n-1}{j-1} - \binom{2n}{j}$ sous forme d'un seul coefficient binomial.

6. En déduire la valeur de S_n . (On exprimera le résultat sous forme de factorielles.)