

---

DEVOIR MAISON N°3  
A RENDRE POUR LE VENDREDI 18 OCTOBRE 2024

---

## Un calcul de somme

Soit  $n$  un entier naturel non nul. On cherche à calculer la somme  $S_n = \sum_{k=0}^n k \binom{2n}{n+k}$ .

1. Calculer  $S_1, S_2$  et  $S_3$ .

2. Montrer que  $S_n = \sum_{j=n}^{2n} j \binom{2n}{j} - n \sum_{j=n}^{2n} \binom{2n}{j}$ .

3. Justifier que pour tout  $j \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$ , on a  $j \binom{2n}{j} = 2n \binom{2n-1}{j-1}$ .

4. En déduire que  $S_n = n \sum_{j=n}^{2n} \binom{2n-1}{j-1} + n \sum_{j=n}^{2n} \left( \binom{2n-1}{j-1} - \binom{2n}{j} \right)$ .

5. Pour tout  $j \in \llbracket n, 2n \rrbracket$ , exprimer  $\binom{2n-1}{j-1} - \binom{2n}{j}$  sous forme d'un seul coefficient binomial.

6. En déduire la valeur de  $S_n$ . (On exprimera le résultat sous forme de factorielles.)