

Image réciproque d'un ensemble par une application

I. Généralités

1. Soit $x \in E$.

On a $x \in f^*(F) \Leftrightarrow f(x) \in F \Leftrightarrow x \in E$ donc $f^*(F) = E$.

De même, $x \in f^*(\text{Im}(f)) \Leftrightarrow f(x) \in \text{Im}(f) \Leftrightarrow x \in E$ donc $f^*(\text{Im}(f)) = E$.

Enfin, $x \in f^*(\emptyset) \Leftrightarrow f(x) \in \emptyset$ ce qui est absurde donc $f^*(\emptyset) = \emptyset$.

2. Soit $A \subset F$. Soit $x \in E$.

On a

$$x \in f^*(\overline{A}) \Leftrightarrow f(x) \in \overline{A} \Leftrightarrow f(x) \notin A \Leftrightarrow x \notin f^*(A) \Leftrightarrow x \in \overline{f^*(A)}$$

donc $f^*(\overline{A}) = \overline{f^*(A)}$.

3. Soient A et B deux parties de F .

(a) Soit $x \in E$. On a

$$x \in f^*(A \cup B) \Leftrightarrow f(x) \in A \cup B \Leftrightarrow f(x) \in A \text{ ou } f(x) \in B \Leftrightarrow x \in f^*(A) \text{ ou } x \in f^*(B)$$

$$\text{i.e. } x \in f^*(A \cup B) \Leftrightarrow x \in f^*(A) \cup f^*(B) \text{ donc } f^*(A \cup B) = f^*(A) \cup f^*(B).$$

(b) Soit $x \in E$. On a

$$x \in f^*(A \cap B) \Leftrightarrow f(x) \in A \cap B \Leftrightarrow f(x) \in A \text{ et } f(x) \in B \Leftrightarrow x \in f^*(A) \text{ et } x \in f^*(B)$$

$$\text{i.e. } x \in f^*(A \cap B) \Leftrightarrow x \in f^*(A) \cap f^*(B) \text{ donc } f^*(A \cap B) = f^*(A) \cap f^*(B).$$

(c) En utilisant la question 2 et la question précédente, on trouve

$$f^*(A \setminus B) = f^*(A \cap \overline{B}) = f^*(A) \cap f^*(\overline{B}) = f^*(A) \cap \overline{f^*(B)}$$

$$\text{d'où } f^*(A \setminus B) = f^*(A) \setminus f^*(B).$$

4. (a) Soit $A \subset F$. Soit $y \in F$. On a les équivalences suivantes :

$$y \in f(f^*(A)) \Leftrightarrow \exists x \in f^*(A), f(x) = y \Leftrightarrow \exists x \in E, f(x) = y \text{ et } y = f(x) \in A \Leftrightarrow y \in A \cap \text{Im}(f)$$

$$\text{donc } \forall A \subset F, f(f^*(A)) = A \cap \text{Im}(f).$$

(b) On a les équivalences suivantes :

$$f \text{ est surjective} \Leftrightarrow \text{Im}(f) = F \Leftrightarrow \forall A \subset F, A \cap \text{Im}(f) = A.$$

(En effet, l'implication de la gauche vers la droite est triviale. Pour celle de la droite vers la gauche, si pour toute partie $A \subset F$, $A \cap \text{Im}(f) = A$, ceci est vrai en particulier pour $A = F$, ce qui implique que $\text{Im}(f) = F$.)

Or, d'après la question précédente, on sait que pour toute partie $A \subset F$, $A \cap \text{Im}(f) = f(f^*(A))$ donc on a bien montré l'équivalence

$$f \text{ est surjective} \Leftrightarrow \forall A \subset F, f(f^*(A)) = A.$$

5. (a) Soit $X \subset E$. Soit $x \in X$. On a $f(x) \in f(X)$ donc par définition, ceci implique que $x \in f^*(f(X))$ d'où l'inclusion $X \subset f^*(f(X))$.

On a donc bien montré que $\boxed{\forall X \subset E, X \subset f^*(f(X))}$.

- (b) • Supposons que f est injective. Montrons que pour tout $X \subset E$, on a $X = f^*(f(X))$. Soit $X \subset E$. D'après la question précédente, on sait que $X \subset f^*(f(X))$. Il nous reste donc à montrer que $f^*(f(X)) \subset X$.

Soit $x \in f^*(f(X))$. Par définition, ceci implique que $f(x) \in f(X)$. Ainsi, il existe $a \in X$ tel que $f(x) = f(a)$. Puisque f est injective par hypothèse, on en déduit que $x = a$ donc $x \in X$.

On a donc bien l'inclusion $f^*(f(X)) \subset X$ d'où l'égalité $X = f^*(f(X))$ et ce pour toute partie $X \subset E$.

• Réciproquement, supposons que pour toute partie $X \subset E$, on a $X = f^*(f(X))$. Montrons qu'alors f est injective.

Soient $(x, x') \in E^2$ tels que $f(x) = f(x')$. Posons $X = \{x\} \subset E$.

On a alors $f(x') \in f(X) = \{f(x)\}$ donc $x' \in f^*(f(X)) = X$ par hypothèse, i.e. $x' \in \{x\}$, ce qui implique que $x = x'$ et prouve ainsi l'injectivité de f .

On a donc bien montré l'équivalence

$$\boxed{f \text{ est injective} \Leftrightarrow \forall X \subset E, X = f^*(f(X))}.$$

6. Soit G un ensemble et $g : F \rightarrow G$ une application. Soit $A \subset G$. Soit $x \in E$. On a les équivalences suivantes :

$$x \in (g \circ f)^*(A) \Leftrightarrow g \circ f(x) \in A \Leftrightarrow f(x) \in g^*(A) \Leftrightarrow x \in f^*(g^*(A))$$

d'où l'égalité $\boxed{\forall A \subset G, (g \circ f)^*(A) = f^*(g^*(A))}$.

II. Etude d'un exemple

1. L'application f est définie dès lors que $x^2 + x + 1 \geq 0$. Or, le discriminant du trinôme du second degré $P(x) = x^2 + x + 1$ vaut $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$ donc le trinôme est toujours du signe du coefficient dominant, c'est à dire positif en l'occurrence.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 > 0$ donc $\boxed{\mathcal{D} = \mathbb{R}}$.

2. Mettons le trinôme sous forme canonique.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}, P(x) = x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$.

Connaissant les variations de la fonction carré, on retrouve celles de ce trinôme : la fonction P est décroissante sur $] -\infty; -\frac{1}{2}]$, atteint son minimum en $-\frac{1}{2}$ (qui vaut $\frac{3}{4}$) et est croissante sur $[-\frac{1}{2}; +\infty[$. En composant par la fonction racine carrée qui est croissante sur \mathbb{R}_+ , on retrouve les mêmes variations pour la fonction f qui admet donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
f	$+\infty$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$

Puisque f est décroissante et continue sur $] -\infty; -\frac{1}{2}]$ et croissante et continue sur $[-\frac{1}{2}; +\infty[$, on a

$$f(\mathbb{R}) = f\left(]-\infty; -\frac{1}{2}] \cup [-\frac{1}{2}; +\infty[)\right) = f\left(]-\infty; -\frac{1}{2}]\right) \cup f\left([-\frac{1}{2}; +\infty[)\right) = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty\right]$$

d'où $\text{Im}(f) = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty \right[$. Puisque $\text{Im}(f) \neq \mathbb{R}$, on en déduit que f n'est pas surjective.

3. On a $f(-1) = f(0) = 1$ donc l'application f n'est pas injective.

4. (a) $0 \notin \text{Im}(f)$ donc $f^*({0}) = \emptyset$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$x \in f^*({1}) \Leftrightarrow f(x) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + x + 1} = 1.$$

Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x + 1 > 0$, on obtient par élévation au carré

$$x \in f^*({1}) \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 1 \Leftrightarrow x(x + 1) = 0$$

i.e. $x = 0$ ou $x = -1$ donc $f^*({1}) = \{-1, 0\}$.

(c) D'après la question 4.(b) de la première partie, on a

$$f(f^*([0, 1])) = [0, 1] \cap \text{Im}(f) = [0, 1] \cap \left[\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty \right[$$

donc $f(f^*([0, 1])) = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}; 1 \right]$.

(d) En s'aidant du tableau de variations et du fait que $f(-1) = f(0) = 1$, on a

$$f^* \left(f \left(\left[-\frac{1}{2}; 0 \right] \right) \right) = f^* \left(\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1 \right] \right) = [-1, 0].$$

(e) Vu la question précédente, il suffit de prendre $A = [0; 1]$ et $X = \left[-\frac{1}{2}; 0 \right]$.

III. Application image réciproque

1. • Supposons que f^* est injective. Montrons que f est surjective.

On a vu en question 1 de la première partie que $f^*(\text{Im}(f)) = f^*(F) = E$ donc par injectivité de f^* , ceci implique que $\text{Im}(f) = F$, d'où la surjectivité de f .

• Supposons que f est surjective. Montrons que f^* est injective.

Soient A et B deux parties de F telles que $f^*(A) = f^*(B)$.

Alors $f(f^*(A)) = f(f^*(B))$. Or, d'après la question 4.(b) de la première partie, puisque f est surjective, on a $f(f^*(A)) = A$ et $f(f^*(B)) = B$ donc $A = B$, ce qui prouve l'injectivité de f^* .

On a donc bien montré que f^* est injective si et seulement si f est surjective.

2. • Supposons que f^* est surjective. Montrons que f est injective.

Soient $(x, x') \in E^2$ tels que $f(x) = f(x')$.

Par surjectivité de f^* , il existe $A \in \mathcal{P}(F)$ tel que $f^*(A) = \{x\}$. Par définition, ceci implique que $f(x) \in A$.

Puisque $f(x') = f(x)$, on a donc $f(x') \in A$ d'où $x' \in f^*(A) = \{x\}$, ce qui implique que $x' = x$.

On a donc bien prouvé l'injectivité de f .

• Supposons que f est injective. Montrons que f^* est surjective.

Soit $X \in \mathcal{P}(E)$. D'après la question 5.(b) de la première partie, puisque f est injective, on a $f^*(f(X)) = X$ ce qui entraîne que $X \in \text{Im}(f^*)$.

Ainsi, tout élément de $\mathcal{P}(E)$ admet un antécédent par f^* , ce qui assure la surjectivité de f^* .

On a donc bien montré que f^* est surjective si et seulement si f est injective.