
Programme de colles 4

Semaine du 14/10

Questions de cours

En plus d'une des démonstrations suivantes, on posera à chaque élève trois formules de trigonométrie à savoir réciter sans hésitation parmi les suivantes :

Formules de parité et de symétrie ($\cos(-x)$, $\sin(-x)$, $\cos(\pi - x)$, $\sin(\pi - x)$, $\cos(\pi + x)$, $\sin(\pi + x)$, $\cos(\frac{\pi}{2} - x)$, $\sin(\frac{\pi}{2} - x)$, ...), formules d'addition et de duplication, valeurs des cosinus, sinus et des tangentes des angles remarquables (liste non exhaustive : $\cos(\frac{\pi}{4})$, $\sin(\frac{\pi}{6})$, $\tan(\frac{\pi}{3})$, ...).

Dénombrement

1. Nombre de p -uplets sans répétition d'éléments d'un ensemble de cardinal n .
2. Relation de Pascal.
3. Formule du binôme de Newton.

Trigonométrie

1. Démontrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$ puis en déduire les trois autres formules d'addition.
2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$ et $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$.

Nombres complexes

1. Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$ et $\overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z}'$.
2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\max(|\operatorname{Re}(z)|, |\operatorname{Im}(z)|) \leq |z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$.
3. Inégalité triangulaire (à démontrer) en précisant le cas d'égalité (sans démonstration).
4. $|z| = 1 \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}, z = e^{i\theta}$.

Exercices

Dénombrement

Exercices concrets de dénombrement faisant manipuler des cardinaux classiques (produit cartésien, union, nombre d'applications entre ensembles finis, uplets, coefficients binomiaux, etc.). Calculs de sommes faisant intervenir la formule du binôme de Newton.

Trigonométrie

Résolution d'équations trigonométriques de la forme $\cos(x) = c$, $\sin(x) = s$, $\tan(x) = t$, $a \cos(\theta) + b \sin(\theta) = c$.

Nombres complexes

Manipulation des nombres complexes sous forme algébrique, résolution d'équations du premier degré. Caractérisation des nombres réels et des nombres imaginaires purs en utilisant le conjugué. Affixes de points (ou vecteurs) du plan.