BCPST1
A. Panetta

Devoir maison n°4
A rendre pour le mardi 5 novembre 2024

Méthode de Cardan

Le but de ce problème est de trouver une méthode pour obtenir les racines (complexes) d'une équation de degré 3. On admettra qu'une équation de degré 3 à cœfficients complexes admet au plus trois racines complexes.

Partie I : Préliminaires

On rappelle qu'on note j le nombre complexe $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $z^3 = 1$ sur $\mathbb{C}$ est $\{1, j, j^2\}$.
2. Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$. En déduire que l'ensemble des solutions de l'équation $z^3 = z_0^3$ sur $\mathbb{C}$ est $\{z_0, jz_0, j^2z_0\}$.
3. Donner l'ensemble des solutions des équations $z^3 = e^{\frac{i\pi}{3}}$ et $z^3 = e^{-\frac{i\pi}{3}}$ sur $\mathbb{C}$.

Partie II : Résolution d'une équation de degré 3.

On considère l'équation de degré 3 suivante :

$$(E) : x^3 - 6x^2 + 9x - 3 = 0.$$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction $f : x \longmapsto x^3 - 6x^2 + 9x - 3$ et en déduire que l'équation (E) admet trois solutions réelles distinctes.
2. Soit x une solution de (E), et h un nombre complexe fixé. On pose $z = x + h$.
   Déterminer une équation vérifiée par z. Montrer que pour une valeur de h bien choisie, l'équation obtenue ne comporte pas de terme de degré 2.
3. On considère désormais l'équation $(E') : z^3 - 3z - 1 = 0$.
   Soit $(u, v) \in \mathbb{C}^2$. On pose $U = u^3$ et $V = v^3$. On suppose que :
   $$\left\{ \begin{array}{rcl} U + V & = & 1 \\ uv & = & 1. \end{array} \right. \quad (*)$$
   (a) Montrer que $u + v$ est racine de l'équation (E').
   (b) A l'aide des valeurs de $U + V$ et de UV, déterminer un trinôme du second degré à cœfficients réels dont U et V sont les racines.
   (c) Ecrire une fonction Python `Racines (a,b,c)` donnant les racines du trinôme du second degré à cœfficients réels $ax^2 + bx + c = 0$ en fonction du signe de son discriminant (on rappelle que le nombre complexe i se note `1j` et que plus généralement, tout nombre complexe $x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se note `x+y*1j`).
   (d) Calculer U et V, les écrire sous forme exponentielle, puis en déduire toutes les paires $\{u, v\}$ respectant $(*)$. *On pourra utiliser les résultats de la Partie I.*
   (e) Donner les trois racines de (E').
4. Résoudre (E).