
Programme de colles 5

Semaine du 04/11

Questions de cours

En plus d'une des démonstrations suivantes, on posera à chaque élève trois formules de trigonométrie à savoir réciter sans hésitation parmi les suivantes :

Formules de parité et de symétrie ($\cos(-x)$, $\sin(-x)$, $\cos(\pi - x)$, $\sin(\pi - x)$, $\cos(\pi + x)$, $\sin(\pi + x)$, $\cos(\frac{\pi}{2} - x)$, $\sin(\frac{\pi}{2} - x)$, ...), formules d'addition et de duplication, valeurs des cosinus, sinus et des tangentes des angles remarquables (liste non exhaustive : $\cos(\frac{\pi}{4})$, $\sin(\frac{\pi}{6})$, $\tan(\frac{\pi}{3})$, ...).

Trigonométrie

1. Démontrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$ puis en déduire les trois autres formules d'addition.
2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$ et $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$.

Nombres complexes

1. Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$ et $\overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z}'$.
2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\max(|\operatorname{Re}(z)|, |\operatorname{Im}(z)|) \leq |z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$.
3. Inégalité triangulaire (à démontrer) en précisant le cas d'égalité (sans démonstration).
4. $|z| = 1 \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}, z = e^{i\theta}$.
5. Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$.
6. Formule de Moivre.
7. Formules d'Euler.
8. Racines de $ax^2 + bx + c = 0$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$ dans le cas où $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.
9. Résolution de $x^2 = a$, où $a \in \mathbb{C}^*$.

Exercices

Trigonométrie

Résolution d'équations trigonométriques de la forme $\cos(x) = c$, $\sin(x) = s$, $\tan(x) = t$, $a \cos(\theta) + b \sin(\theta) = c$.

Nombres complexes

Résolution d'équations du premier degré. Caractérisation des nombres réels et des nombres imaginaires purs en utilisant le conjugué. Affixes de points (ou vecteurs) du plan.

Mise sous forme exponentielle. Linéarisation/délinéarisation. Calcul des racines d'un trinôme du second degré. Recherche de racines carrées.