Corrigé du devoir maison n°3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. • Si $n = 1$, on a
$$\boxed{S_1 = \binom{2}{2} = 1.}$$
• Si $n = 2$, on a
$$\boxed{S_2 = \binom{4}{3} + 2\binom{4}{4} = 4 + 2 = 6.}$$
• Si $n = 3$, on a
$$S_3 = \binom{6}{4} + 2\binom{6}{5} + 3\binom{6}{6} = \frac{6 \times 5}{2} + 2 \times 6 + 3$$
d'où $\boxed{S_3 = 30.}$

2. On effectue le changement d'indice $j = n + k$. On obtient
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k\binom{2n}{n+k} = \sum_{j=n}^{2n}(j-n)\binom{2n}{j}$$
d'où par linéarité de la somme
$$\boxed{S_n = \sum_{j=n}^{2n} j\binom{2n}{j} - \sum_{j=n}^{2n} n\binom{2n}{j} = \sum_{j=n}^{2n} j\binom{2n}{j} - n\sum_{j=n}^{2n}\binom{2n}{j}.}$$

3. Soit $j \in [\![1, 2n]\!]$. On a
$$j\binom{2n}{j} = j\frac{(2n)!}{j!(2n-j)!} = \frac{(2n)!}{(j-1)!(2n-j)!} = (2n)\frac{(2n-1)!}{(j-1)!(2n-1-(j-1))!}$$
d'où $\boxed{\text{pour tout } j \in [\![1, 2n]\!], j\binom{2n}{j} = 2n\binom{2n-1}{j-1}.}$

4. En remplaçant dans le résultat trouvé dans la question 2, on obtient que
$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{j=n}^{2n} 2n\binom{2n-1}{j-1} - n\sum_{j=n}^{2n}\binom{2n}{j} \\ &= (n+n)\sum_{j=n}^{2n}\binom{2n-1}{j-1} - n\sum_{j=n}^{2n}\binom{2n}{j} \\ &= n\sum_{j=n}^{2n}\binom{2n-1}{j-1} + n\sum_{j=n}^{2n}\binom{2n-1}{j-1} - n\sum_{j=n}^{2n}\binom{2n}{j} \end{aligned}$$
d'où par linéarité de la somme
$$\boxed{S_n = n\sum_{j=n}^{2n}\binom{2n-1}{j-1} + n\sum_{j=n}^{2n}\left(\binom{2n-1}{j-1} - \binom{2n}{j}\right).}$$

5. Soit $j \in [\![n, 2n]\!]$. D'après la relation de Pascal, on a

$$\binom{2n-1}{j-1} + \binom{2n-1}{j} = \binom{2n}{j}.$$

On en déduit que $\boxed{\text{pour tout } j \in [\![n, 2n]\!],\ \binom{2n-1}{j-1} - \binom{2n}{j} = -\binom{2n-1}{j}.}$

6. D'après les questions 4 et 5, on trouve

$$S_n = n\sum_{j=n}^{2n}\binom{2n-1}{j-1} - n\sum_{j=n}^{2n}\binom{2n-1}{j} = n\sum_{j=n}^{2n}\left(\binom{2n-1}{j-1} - \binom{2n-1}{j}\right).$$

On reconnaît une somme télescopique et on trouve

$$S_n = n\left(\binom{2n-1}{n-1} - \binom{2n-1}{2n}\right) = n\binom{2n-1}{n-1} = n\frac{(2n-1)!}{(n-1)!(2n-1-(n-1))!} = n\frac{(2n-1)!}{(n-1)!n!}$$

d'où

$$\boxed{S_n = \frac{(2n-1)!}{((n-1)!)^2}.}$$