Corrigé du devoir maison n°4

Problème 1 : Méthode de Cardan

Partie I : Préliminaires

1. Cherchons les nombres complexes dont le cube vaut 1, i.e. résolvons l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$
$$z^3 - 1 = 0.$$
$z = 1$ est une solution évidente. On peut donc factoriser cette équation par $z - 1$ et on obtient
$$z^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2+z+1) = 0.$$
Considérons l'équation $z^2 + z + 1 = 0$. C'est un trinôme du second degré à cœfficients $a = b = c = 1$ réels.
On a $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 < 0$.
Les racines de ce trinôme du second degré sont donc
$$z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2i\pi}{3}} = j \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{4i\pi}{3}} = j^2.$$
Notons qu'on a également $j^2 = \overline{j} = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$.
Finalement, on a $z^3 - 1 = (z-1)(z-j)(z-j^2)$ donc
$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'équation } z^3 = 1 \text{ est } \{1, j, j^2\}.}$$

2. On a $z^3 = z_0^3 \Leftrightarrow \dfrac{z^3}{z_0^3} = 1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{z}{z_0}\right)^3 = 1$.
D'après la question précédente, ceci équivaut à $\dfrac{z}{z_0} \in \{1, j, j^2\}$.
Ainsi, $\dfrac{z}{z_0} = 1$ ou $\dfrac{z}{z_0} = j$ ou $\dfrac{z}{z_0} = j^2$ d'où $z = z_0$ ou $z = jz_0$ ou $z = j^2 z_0$.
$$\boxed{\text{On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation } z^3 = z_0^3 \text{ est } \{z_0, jz_0, j^2z_0\}.}$$

3. • On a $z^3 = e^{\frac{i\pi}{3}} \Leftrightarrow z^3 = (e^{\frac{i\pi}{9}})^3$.
D'après la question précédente, l'ensemble des solutions de l'équation $z^3 = (e^{\frac{i\pi}{9}})^3$ est $\{e^{\frac{i\pi}{9}}, je^{\frac{i\pi}{9}}, j^2e^{\frac{i\pi}{9}}\} = \{e^{\frac{i\pi}{9}}, e^{\frac{2i\pi}{3}}e^{\frac{i\pi}{9}}, e^{-\frac{2i\pi}{3}}e^{\frac{i\pi}{9}}\} = \boxed{\{e^{\frac{i\pi}{9}}, e^{\frac{7i\pi}{9}}, e^{-\frac{5i\pi}{9}}\}.}$
• On a $z^3 = e^{-\frac{i\pi}{3}} \Leftrightarrow z^3 = (e^{-\frac{i\pi}{9}})^3$.
D'après la question précédente, l'ensemble des solutions de l'équation $z^3 = (e^{-\frac{i\pi}{9}})^3$ est $\{e^{-\frac{i\pi}{9}}, je^{-\frac{i\pi}{9}}, j^2e^{-\frac{i\pi}{9}}\} = \{e^{-\frac{i\pi}{9}}, e^{\frac{2i\pi}{3}}e^{-\frac{i\pi}{9}}, e^{-\frac{2i\pi}{3}}e^{-\frac{i\pi}{9}}\} = \boxed{\{e^{-\frac{i\pi}{9}}, e^{\frac{5i\pi}{9}}, e^{-\frac{7i\pi}{9}}\}.}$

Partie II : Résolution d'une équation de degré 3.

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$.
D'après le théorème sur le signe d'un trinôme du second degré (ici, son cœfficient dominant est positif et ses racines sont 1 et 3), on en déduit que
$$f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[\text{ et } f'(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in [1,3]$$
donc f est croissante sur $]-\infty, 1[$ et sur $[3, +\infty[$ et décroissante sur $[1,3]$.
De plus, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 \left(1 - \dfrac{6}{x} + \dfrac{9}{x^2} - \dfrac{3}{x^3}\right)$.
Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{6}{x} + \dfrac{9}{x^2} - \dfrac{3}{x^3} = 1$ donc par produit, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
De même, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 \left(1 - \dfrac{6}{x} + \dfrac{9}{x^2} - \dfrac{3}{x^3}\right)$.
Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 - \dfrac{6}{x} + \dfrac{9}{x^2} - \dfrac{3}{x^3} = 1$ donc par produit, on en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
En calculant $f(1) = 1$ et $f(3) = -3$, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires sur les trois intervalles $]-\infty, 1], [1,3]$ et $[3, +\infty[$, on en déduit qu'il existe $x_1 \in]-\infty, 1[, x_2 \in]1,3[$ et $x_3 \in]3, +\infty[$ tels que
$$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0.$$
$$\boxed{\text{L'équation } (E) \text{ admet donc bien trois solutions réelles distinctes.}}$$

2. On a $x = z - h$. L'équation (E) devient alors
$$\begin{array}{rl} (E) : & (z-h)^3 - 6(z-h)^2 + 9(z-h) - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow & z^3 - 3hz^2 + 3h^2z - h^3 - 6z^2 + 12hz - 6h^2 + 9z - 9h - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow & z^3 + (-3h-6)z^2 + (3h^2 + 12h + 9)z - h^3 - 6h^2 - 9h - 3 = 0. \end{array}$$
En posant $h = -2$, on en déduit que $z = x - 2$ vérifie l'équation
$$\boxed{(E') : z^3 - 3z - 1 = 0.}$$

3. (a) On a
$$\begin{array}{rcl} (u+v)^3 - 3(u+v) - 1 & = & u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - 3u - 3v - 1 \\ & = & U + V + 3u(uv) + 3v(uv) - 3u - 3v - 1 \\ & = & 1 + 3u + 3v - 3u - 3v - 1 \\ & = & 0 \end{array}$$

donc $\boxed{u+v \text{ est bien racine de } (E').}$

(b) On a $U+V=1$ et $UV=u^3v^3=(uv)^3=1$. D'après les relations cœfficients-racines, U et V sont racines du trinôme du second degré $X^2-(U+V)X+UV=0$, i.e.

$$\boxed{U \text{ et } V \text{ sont les racines de } X^2-X+1=0.}$$

(c)
```python
from math import *

def Racines(a,b,c):
    D=b**2-4*a*c
    if D>0:
        return((-b-sqrt(D))/(2*a),(-b+sqrt(D))/(2*a))
    elif D==0:
        return(-b/(2*a))
    elif D<0:
        return((-b-sqrt(-D)*1j)/(2*a),(-b+sqrt(-D)*1j)/(2*a))
```

(d) Le discriminant du trinôme X^2-X+1 vaut $\Delta=(-1)^2-4\times1\times1=1-4=-3<0$ donc les racines U et V de ce trinôme sont

$$\boxed{U=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ et } V=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}=e^{-i\frac{\pi}{3}}.}$$

On a donc $u^3=e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $v^3=e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
D'après les résultats de la Partie I, les nombres complexes u tels que $u^3=e^{i\frac{\pi}{3}}$ sont $\{e^{i\frac{\pi}{9}},e^{\frac{7i\pi}{9}},e^{-\frac{5i\pi}{9}}\}$.
De même, les nombres complexes v tels que $v^3=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ sont $\{e^{-i\frac{\pi}{9}},e^{\frac{5i\pi}{9}},e^{-\frac{7i\pi}{9}}\}$.
Or, on veut que $u+v=1$ et $uv=1$.
La condition $uv=1$ impose le fait que u et v doivent être conjugués.
• Si $\{u,v\}=\{e^{i\frac{\pi}{9}},e^{-i\frac{\pi}{9}}\}$, on a bien $uv=1$ et d'après la formule d'Euler,

$$U+V=u^3+v^3=e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{-i\frac{\pi}{3}}=2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=1.$$

• Si $\{u,v\}=\{e^{\frac{5i\pi}{9}},e^{-\frac{5i\pi}{9}}\}$, on a de même $uv=1$ et $U+V=u^3+v^3=1$.
• Enfin, si $\{u,v\}=\{e^{\frac{7i\pi}{9}},e^{-\frac{7i\pi}{9}}\}$, on a également $uv=1$ et $U+V=u^3+v^3=1$.
Finalement, les paires $\{u,v\}$ possibles sont

$$\boxed{\{e^{i\frac{\pi}{9}},e^{-i\frac{\pi}{9}}\},\{e^{\frac{5i\pi}{9}},e^{\frac{-5i\pi}{9}}\},\{e^{\frac{7i\pi}{9}},e^{\frac{-7i\pi}{9}}\}.}$$

(e) D'après la question 3.(a) de la Partie II, si $\{u,v\}$ vérifie $(*)$, alors $u+v$ est racine de (E').
D'après la question précédente, on obtient trois racines différentes pour (E') :

$$z_1=e^{i\frac{\pi}{9}}+e^{-i\frac{\pi}{9}}=2\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\ ;\ z_2=e^{\frac{5i\pi}{9}}+e^{-\frac{5i\pi}{9}}=2\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right)\ ;\ z_3=e^{\frac{7i\pi}{9}}+e^{-\frac{7i\pi}{9}}=2\cos\left(\frac{7\pi}{9}\right).$$

Elles sont bien différentes car $\frac{\pi}{9},\frac{5\pi}{9}$ et $\frac{7\pi}{9}$ appartiennent à $[0,\pi]$ et cos est injective sur $[0,\pi]$.

Or, une équation de degré 3 admet au plus trois racines complexes.

$$\boxed{\text{Les racines de } (E') \text{ sont donc } \left\{2\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) ; 2\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right) ; 2\cos\left(\frac{7\pi}{9}\right)\right\}.}$$

4. On a vu en deuxième question de la Partie II que x est racine de (E) si et seulement si $z = x - 2$ est racine de (E'). Ainsi, z est racine de (E') si et seulement si $x = z + 2$ est racine de (E).

$$\boxed{\text{Les racines de } (E) \text{ sont donc } \left\{2\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + 2; 2\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right) + 2; 2\cos\left(\frac{7\pi}{9}\right) + 2\right\}.}$$