Corrigé de la liste d'exercices n°7 — Nombres complexes

Exercice 1

1. $(2-5i)(3+i) = 6+2i-15i+5 = 11-13i$.
2. $\dfrac{3+2i}{i-1} = \dfrac{(3+2i)(-1-i)}{(i-1)(-i-1)} = \dfrac{-1-5i}{2}$.
3. On a $(1-i)^2 = 1-2i-1 = -2i$. Donc
$$(1-i)^{32} = ((1-i)^2)^{16} = (-2i)^{16} = (-2)^{16}i^{16} = 2^{16}(i^4)^4 = 2^{16}.$$
4. D'après la formule du binôme de Newton, on a
$$(2-i)^3 = 2^3 - 3\times 2^2 \times i + 3\times 2\times i^2 - i^3 = 8-12i-6+i = 2-11i.$$
5. $\dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{1-i}{2}$.
6. $(12+5i)(3-i) = 41+3i$.
7. $\dfrac{i-3}{i+2} = \dfrac{(-3+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \dfrac{-5+5i}{5} = -1+i$.
8. $\dfrac{3+2i}{(1+i)(i-1)} = \dfrac{3+2i}{-2} = \dfrac{-3-2i}{2} = -\dfrac{3}{2} - i$.
9. $\dfrac{7+3i}{1-i} + 2i = \dfrac{(7+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} + 2i = \dfrac{4+10i}{2} + 2i = 2+7i$.

Exercice 2

Soient $M(a,b)$ et $M(a',b')$ deux points de $\mathbb{R}^2$. On a donc $z = a+ib$ et $z' = a'+ib'$.
Soit $I\left(\dfrac{a+a'}{2}, \dfrac{b+b'}{2}\right)$ le milieu du segment $[MM']$.
Son affixe est alors $z'' = \dfrac{a+a'}{2} + i\dfrac{b+b'}{2} = \dfrac{z+z'}{2}$.

Exercice 3

Soit $Z = \dfrac{z+z'}{1+zz'}$. On a
$$\overline{Z} = \overline{\left(\frac{z+z'}{1+zz'}\right)} = \frac{\overline{z}+\overline{z'}}{1+\overline{z}\,\overline{z'}}.$$
Or, $|z| = |z'| = 1$ donc $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$ et $\overline{z'} = \dfrac{1}{z'}$ d'où
$$\overline{Z} = \frac{\frac{1}{z}+\frac{1}{z'}}{1+\frac{1}{z}\frac{1}{z'}} = \frac{\frac{z+z'}{zz'}}{\frac{zz'+1}{zz'}} = \frac{z+z'}{1+zz'} = Z$$
donc Z est réel.

Exercice 4

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

1. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{z+1}{z-1} \in \mathbb{R} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{z+1}{z-1} = \overline{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{z+1}{z-1} = \frac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1} \\
&\Leftrightarrow \quad (z+1)(\overline{z}-1) = (z-1)(\overline{z}+1) \\
&\Leftrightarrow \quad |z|^2 - z + \overline{z} - 1 = |z|^2 + z - \overline{z} - 1 \\
&\Leftrightarrow \quad 2z = 2\overline{z} \\
&\Leftrightarrow \quad z = \overline{z} \\
&\Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{S} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{z+1}{z-1} = -\overline{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{z+1}{z-1} = -\frac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1} \\
&\Leftrightarrow \quad (z+1)(\overline{z}-1) = (1-z)(\overline{z}+1) \\
&\Leftrightarrow \quad |z|^2 - z + \overline{z} - 1 = \overline{z} + 1 - |z|^2 - z \\
&\Leftrightarrow \quad 2|z|^2 = 2 \\
&\Leftrightarrow \quad |z| = 1
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{S} = \{e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\} \setminus \{1\}$.

Exercice 5

1. $-3i = 3e^{-i\frac{\pi}{2}}$.
2. $-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2i\pi}{3}} = j$.
3. $1 - i\sqrt{3} = 2\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
4. $\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(3 + i\sqrt{3}) = e^{\frac{2i\pi}{3}} 2\sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\right) = 2\sqrt{3}e^{\frac{2i\pi}{3}}e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{3}e^{\frac{5i\pi}{6}}$.
5. $\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 = (e^{\frac{2i\pi}{3}})^4 = e^{\frac{8i\pi}{3}} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
6. $3 + i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\right) = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$.
7. $1 + i = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

8. $(1-i)\left(-1+i\sqrt{3}\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}2\left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{\frac{2i\pi}{3}} = 2\sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{12}}$.
9. $(1-i)^7 = (\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}})^7 = \sqrt{2}^7 e^{-\frac{7i\pi}{4}} = 8\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$.
10. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{-1-i}{i} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{\sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{4}}}{e^{i\frac{\pi}{2}}} = e^{\frac{3i\pi}{4}}$.
11. $-3\exp(4) = 3\exp(4)e^{i\pi}$.

Exercice 6

1. $(\cos(\alpha)+i\sin(\alpha))^4 = (e^{i\alpha})^4 = e^{4i\alpha}$.
2. $-\cos(\alpha)-i\sin(\alpha) = \cos(\alpha+\pi)+i\sin(\alpha+\pi) = e^{i(\alpha+\pi)}$.
3. $\cos(-\alpha)+i\sin(\alpha) = \cos(\alpha)+i\sin(\alpha) = e^{i\alpha}$.
4. $-2i\cos(\alpha)+2\sin(\alpha) = -2i(\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)) = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{i\alpha} = 2e^{i(\alpha-\frac{\pi}{2})}$.
5. $\sin(\alpha)+i\cos(\alpha) = i(\cos(\alpha)-i\sin(\alpha)) = i(\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)) = e^{i\frac{\pi}{2}}e^{-i\alpha} = e^{i(\frac{\pi}{2}-\alpha)}$.
6. Soit $\alpha \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$.

$$1+i\tan(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)}(\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)) = \frac{1}{\cos(\alpha)}e^{i\alpha}.$$

   • Si $\cos(\alpha) > 0$, i.e. si $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi[$, alors la forme exponentielle de $1+i\tan(\alpha)$ est $\dfrac{1}{\cos(\alpha)}e^{i\alpha}$.
   • Si $\cos(\alpha) < 0$, i.e. si $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha \in]\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi[$, alors la forme exponentielle de $1+i\tan(\alpha)$ est $-\dfrac{1}{\cos(\alpha)}e^{i(\alpha+\pi)}$.
7. En utilisant la technique de l'angle moitié, on trouve

$$1+\cos(\alpha)+i\sin(\alpha) = 1+e^{i\alpha} = e^{i\frac{\alpha}{2}}(e^{i\frac{\alpha}{2}}+e^{-i\frac{\alpha}{2}}) = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}.$$

   • Si $\alpha \equiv \pi[2\pi]$, alors $1+\cos(\alpha)+i\sin(\alpha) = 0$.
   • Si $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) > 0$, i.e. si $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $\dfrac{\alpha}{2} \in]-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi[\Leftrightarrow \alpha \in]-\pi+4k\pi, \pi+4k\pi[$, alors la forme exponentielle de $1+\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)$ est $2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}$.
   • Si $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) < 0$, i.e. si $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $\dfrac{\alpha}{2} \in]\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi[\Leftrightarrow \alpha \in]\pi+4k\pi, 3\pi+4k\pi[$, alors la forme exponentielle de $1+\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)$ est $-2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i(\frac{\alpha}{2}+\pi)}$.

Exercice 7

Soit $z = -\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}$.
On a $z^2 = 2+\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})-2i\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2\sqrt{3}-2i$.
On a $|z|^2 = \sqrt{(2\sqrt{3})^2+(-2)^2} = \sqrt{16} = 4$, d'où $z^2 = 4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right) = 4e^{-i\frac{\pi}{6}}$.
Ainsi, $z = \pm 2e^{-i\frac{\pi}{12}}$. Puisque $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) > 0$ et $\mathrm{Re}(z) < 0$, on en déduit que

$$z = -2e^{-i\frac{\pi}{12}} = 2e^{i\pi}e^{-i\frac{\pi}{12}} = 2e^{i\frac{11\pi}{12}}.$$

Exercice 8

On a

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)\overline{\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \overline{z_j}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z_i\overline{z_j} \\
&= \sum_{k=1}^{n} z_k\overline{z_k} + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} z_i\overline{z_j} + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} z_i\overline{z_j} \\
&= \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} z_i\overline{z_j} + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} z_j\overline{z_i} \\
&= \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} z_i\overline{z_j} + \overline{zi}z_j \\
&= \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} z_i\overline{z_j} + \overline{zi\overline{z_j}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathrm{Re}(z_i\overline{z_j}).
\end{aligned}$$

Exercice 9

1. On a $z^2 = i \Leftrightarrow z^2 = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow z = e^{i\frac{\pi}{4}}$ ou $z = -e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{\frac{5i\pi}{4}}$.
2. On a $z^2 = -i \Leftrightarrow z^2 = e^{\frac{3i\pi}{2}} \Leftrightarrow z = e^{\frac{3i\pi}{4}}$ ou $z = -e^{\frac{3i\pi}{4}} = e^{\frac{7i\pi}{4}}$.
3. Sur $\mathbb{C}$, on a $x^4+1=0 \Leftrightarrow (x^2)^2 = -1 = i^2 \Leftrightarrow x^2 = i$ ou $x^2 = -i$ d'où
$$x^4+1 = (x-e^{i\frac{\pi}{4}})(x-e^{\frac{5i\pi}{4}})(x-e^{\frac{3i\pi}{4}})(x-e^{\frac{7i\pi}{4}}).$$
4. Pour obtenir la décomposition dans $\mathbb{R}$, on multiplie entre eux les termes conjugués deux à deux. En effet, on a $\overline{e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{-i\frac{\pi}{4}} = e^{\frac{7i\pi}{4}}$ et $\overline{e^{3i\frac{\pi}{4}}} = e^{\frac{-3i\pi}{4}} = e^{\frac{5i\pi}{4}}$ d'où
$$\begin{aligned}
x^4+1 &= (x-e^{i\frac{\pi}{4}})(x-\overline{e^{i\frac{\pi}{4}}})(x-e^{\frac{3i\pi}{4}})(x-\overline{e^{\frac{3i\pi}{4}}}) \\
&= (x^2-(e^{i\frac{\pi}{4}}+e^{-i\frac{\pi}{4}})x+1)((x^2-(e^{\frac{3i\pi}{4}}+e^{\frac{-3i\pi}{4}})x+1) \\
&= (x^2-2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)x+1)(x^2-\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)x+1) \\
&= (x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1).
\end{aligned}$$

Exercice 10

1. $z+2i = iz-1 \Leftrightarrow z(1-i) = -1-2i \Leftrightarrow z = \dfrac{(-1-2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} \Leftrightarrow z = \dfrac{1-3i}{2}$.
2. Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que $z=a+ib$.
   Alors
$$2z+\overline{z} = 2+3i \Leftrightarrow 2(a+ib)+a-ib = 2+3i \Leftrightarrow 3a+ib = 2+3i.$$

Par identification des parties réelle et imaginaire, on obtient

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3a & = & 2 \\ b & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & \dfrac{2}{3} \\ b & = & 3 \end{array}\right.$$

ce qui équivaut à $z = \dfrac{2}{3} + 3i$.

3. $(4-2i)z^2 = (1+5i)z \Leftrightarrow z((4-2i)z-(1+5i)) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \,\text{ou}\, z = \dfrac{(1+5i)(4+2i)}{(4-2i)(4+2i)} = \dfrac{-6+22i}{20} = \dfrac{-3+11i}{10}$.
4. $3\overline{z} + 3z - 2 + 3i = 0 \Leftrightarrow 3(z+\overline{z}) = 2-3i \Leftrightarrow 6\text{Re}(z) = 2-3i$, ce qui est absurde car $2-3i \notin \mathbb{R}$ donc cette équation n'admet pas de solution.

Exercice 11

1. $\Delta = 6^2 - 4\times 2\times 5 = -4 < 0$ donc les racines de ce trinôme sont
$$z_1 = \frac{-6+2i}{4} = \frac{-3+i}{2} \,\text{et}\, z_2 = \overline{z_1} = \frac{-3-i}{2}.$$
2. $\Delta = (-1)^2 - 4\times(-1)\times 6 = 25 > 0$ donc les racines sont
$$z_1 = \frac{1-5}{-2} = 2 \,\text{et}\, z_2 = \frac{1+5}{-2} = -3.$$
3. On a vu en cours que les racines de $z^2+z+1=0$ sont $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$ et $\overline{j} = e^{-2i\frac{\pi}{3}}$.
4. Cette équation est bien définie pour $z \in \mathbb{C}\setminus\{-1\}$. On a les équivalences
$$\frac{3z-2}{z+1} = -3z+2 \Leftrightarrow 3z-2 = (z+1)(-3z+2) \Leftrightarrow (3z-2)(1+z+1) = 0 \Leftrightarrow (3z-2)(z+2) = 0$$
donc les racines sont
$$z_1 = -2 \,\text{et}\, z_2 = \frac{2}{3}.$$

Exercice 12

1. • 1ère méthode : On cherche z sous la forme $z = x+iy$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
On a alors $z^2 = 3+4i \Leftrightarrow (x+iy)^2 = 3+4i \Leftrightarrow x^2-y^2+2ixy = 3+4i$ d'où par identification des parties réelle et imaginaire :
$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2-y^2 & = & 3 \\ 2xy & = & 4. \end{array}\right.$$
Par ailleurs, $z^2 = 3+4i \Rightarrow |z^2| = |3+4i| \Rightarrow |z|^2 = \sqrt{3^2+4^2} \Rightarrow x^2+y^2 = 5$.
Ainsi, $2x^2 = (x^2-y^2)+(x^2+y^2) = 3+5 = 8$ d'où $x^2 = 4$ i.e. $x = 2$ ou $x = -2$.
Si $x = 2$, puisque $2xy = 4$, on a $4y = 4$ d'où $y = 1$, ce qui fournit la solution $z = 2+i$.
Si $x = -2$, puisque $2xy = 4$, on a $-4y = 4$ d'où $y = -1$, ce qui fournit la solution $z = -2-i$.
Réciproquement, on vérifie qu'on a bien $(2+i)^2 = (-2-i)^2 = 3+4i$.
• 2ème méthode : On a $|3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$ donc $3+4i = 5\left(\dfrac{3}{5}+\dfrac{4i}{5}\right) = 5e^{i\arccos(\frac{3}{5})}$.
Les solutions de l'équation $z^2 = 3+4i$ sont donc $z = \sqrt{5}e^{\frac{i\arccos(\frac{3}{5})}{2}}$ ou $z = -\sqrt{5}e^{\frac{i\arccos(\frac{3}{5})}{2}}$.

2. • 1ère méthode : On cherche z sous la forme $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
On a alors $z^2 = 8 - 6i \Leftrightarrow (x + iy)^2 = 8 - 6i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = 8 - 6i$ d'où par identification des parties réelle et imaginaire :

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x^2 - y^2 & = & 8 \\ 2xy & = & -6. \end{array} \right.$$

Par ailleurs, $z^2 = 8 - 6i \Rightarrow |z^2| = |8 - 6i| \Rightarrow |z|^2 = \sqrt{8^2 + (-6)^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 10$.
Ainsi, $2x^2 = (x^2 - y^2) + (x^2 + y^2) = 8 + 10 = 18$ d'où $x^2 = 9$ i.e. $x = 3$ ou $x = -3$.
Si $x = 3$, puisque $2xy = -6$, on a $6y = -6$ d'où $y = -1$, ce qui fournit la solution $z = 3 - i$.
Si $x = -3$, puisque $2xy = -6$, on a $-6y = -6$ d'où $y = 1$, ce qui fournit la solution $z = -3 + i$.
Réciproquement, on vérifie qu'on a bien $(-3 + i)^2 = (3 - i)^2 = 8 - 6i$.
• 2ème méthode : On a $|8 - 6i| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = 10$ donc $8 - 6i = 10\left(\frac{4}{5} - \frac{3i}{5}\right) = 10e^{-i\arccos(\frac{4}{5})}$.
Les solutions de l'équation $z^2 = 8-6i$ sont donc $z = \sqrt{10}e^{-\frac{i\arccos(\frac{4}{5})}{2}}$ ou $z = -\sqrt{10}e^{-\frac{i\arccos(\frac{4}{5})}{2}}$.

Exercice 13

Soit $u \in]0, \pi[$. Calculons le discriminant de ce trinôme du second degré :

$$\Delta = 4(1-\cos(u))^2 - 4\times 2(1-\cos(u)) = 4(1-2\cos(u)+\cos^2(u)) - 8 + 8\cos(u) = 4(\cos^2(u)-1) = -4\sin^2(u) < 0$$

car $\sin(u) > 0$ puisque $u \in]0, \pi[$.
Ainsi, $\sqrt{-\Delta} = \sqrt{4\sin^2(u)} = 2|\sin(u)| = 2\sin(u)$ car $u \in]0, \pi[$.
On a donc deux racines complexes conjuguées que sont

$$z_1 = \frac{-2(1 - \cos(u)) - i\sqrt{-\Delta}}{2} = \frac{-2 + 2\cos(u) - 2i\sin(u)}{2} = \cos(u) - 1 - i\sin(u) \text{ et } z_2 = \cos(u) - 1 + i\sin(u).$$

On a $z_2 = -1 + \cos(u) + i\sin(u) = e^{iu} - 1 = e^{i\frac{u}{2}}(e^{i\frac{u}{2}} - e^{-i\frac{u}{2}}) = 2i\sin(\frac{u}{2})e^{i\frac{u}{2}} = 2\sin(\frac{u}{2})e^{i(\frac{u+\pi}{2})}$.
Ainsi, $|z_2| = 2|\sin(\frac{u}{2})|$. Puisque $u \in]0, \pi[$, alors $\frac{u}{2} \in]0, \frac{\pi}{2}[$ donc $2\sin(\frac{u}{2}) > 0$ donc $|z_2| = 2\sin(\frac{u}{2})$.
L'écriture exponentielle de z_2 est donc $z_2 = 2\sin(\frac{u}{2})e^{i\frac{u+\pi}{2}}$ et celle de z_1 est $z_1 = 2\sin(\frac{u}{2})e^{-i\frac{u+\pi}{2}}$.

Exercice 14

1. D'après les fomules d'Euler, on a

$$\begin{aligned} \cos^4(x) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{ix}}{2}\right)^4 \\ &= \frac{1}{16}(e^{4ix} + 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} + 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix}) \\ &= \frac{1}{16}(e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}) \\ &= \frac{1}{16}(2\cos(4x) + 8\cos(2x) + 6) \\ &= \frac{\cos(4x)}{8} + \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

2. D'après les formules d'Euler, on a

$$\begin{aligned}
\cos^4(x)\sin^2(x) &= \frac{1}{16}(e^{4ix}+4e^{2ix}+6+4e^{-2ix}+e^{-4ix})\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2 \\
&= -\frac{1}{64}(e^{4ix}+4e^{2ix}+6+4e^{-2ix}+e^{-4ix})(e^{2ix}-2+e^{-2ix}) \\
&= -\frac{1}{64}(e^{6ix}+e^{-6ix}+2(e^{4ix}+e^{-4ix})-(e^{2ix}+e^{-2ix})-4) \\
&= -\frac{1}{64}(2\cos(6x)+4\cos(4x)-2\cos(2x)-4) \\
&= -\frac{\cos(6x)}{32}-\frac{\cos(4x)}{16}+\frac{\cos(2x)}{32}+\frac{1}{16}.
\end{aligned}$$

3. D'après les formules d'Euler, on a

$$\begin{aligned}
\sin^5(x) &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^5 \\
&= \frac{1}{32i}(e^{5ix}-5e^{3ix}+10e^{ix}-10e^{-ix}+5e^{-3ix}-e^{-5ix}) \\
&= \frac{1}{32i}(2i\sin(5x)-10i\sin(3x)+20i\sin(x)) \\
&= \frac{\sin(5x)}{16}-\frac{5}{16}\sin(3x)+\frac{5}{8}\sin(x).
\end{aligned}$$

Exercice 15

1. D'après la formule de Moivre,

$$\begin{aligned}
\cos(4x) &= \mathrm{Re}((\cos(x)+i\sin(x))^4) \\
&= \mathrm{Re}(\cos^4(x)+4i\cos^3(x)\sin(x)-6\cos^2(x)\sin^2(x)-4i\cos(x)\sin^3(x)+\sin^4(x)) \\
&= \cos^4(x)-6\cos^2(x)\sin^2(x)+\sin^4(x).
\end{aligned}$$

2. D'après la formule de Moivre,

$$\begin{aligned}
\sin(6x) &= \mathrm{Im}((\cos(x)+i\sin(x))^6) \\
&= 6\cos^5(x)\sin(x)-20\cos^3(x)\sin^3(x)+6\cos(x)\sin^5(x).
\end{aligned}$$

3. D'après la formule de Moivre,

$$\begin{aligned}
\cos(3x) &= \mathrm{Re}((\cos(x)+i\sin(x))^3) \\
&= \cos^3(x)-3\cos(x)\sin^2(x).
\end{aligned}$$

4. D'après la formule de Moivre,

$$\begin{aligned}
\sin(3x) &= \mathrm{Im}((\cos(x)+i\sin(x))^3) \\
&= 3\cos^2(x)\sin(x)-\sin^3(x).
\end{aligned}$$

5. D'après la formule de Moivre,

$$\begin{aligned}
\cos(7x) &= \mathrm{Re}((\cos(x)+i\sin(x))^7) \\
&= \cos^7(x)-21\cos^5(x)\sin^2(x)+35\cos^3(x)\sin^4(x)-7\cos(x)\sin^6(x).
\end{aligned}$$

6. D'après la formule de Moivre,

$$\begin{aligned}
\sin(7x) &= \mathrm{Im}((\cos(x)+i\sin(x))^7) \\
&= 7\cos^6(x)\sin(x)-35\cos^4(x)\sin^3(x)+21\cos^2(x)\sin 5(x)-\sin^7(x).
\end{aligned}$$

Exercice 16

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
On a

$$C_n(x) + iS_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) + i\sin(kx) \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n} (e^{ix})^k.$$

On reconnaît la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique.
• Si $x \equiv 0[2\pi]$, alors $e^{ix} = 1$ donc $\sum_{k=0}^{n}(e^{ix})^k = n+1$ d'où par identification, $C_n(x) = n+1$ et $S_n(x) = 0$.
• Supposons dorénavant que $x \not\equiv 0[2\pi]$. On a alors $e^{ix} \neq 1$ donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (e^{ix})^k &= \frac{(e^{ix})^{n+1} - 1}{e^{ix} - 1} \\
&= \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} \\
&= \frac{e^{i\frac{n+1}{2}x}(e^{i\frac{n+1}{2}x} - e^{-i\frac{n+1}{2}x})}{e^{i\frac{x}{2}}(e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}})} \\
&= e^{i\frac{nx}{2}} \frac{2i\sin(\frac{n+1}{2}x)}{2i\sin(\frac{x}{2})} \\
&= \left(\cos\left(\frac{nx}{2}\right) + i\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\right) \frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}.
\end{aligned}$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on en déduit

$$C_n(x) = \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})} \quad \text{et} \quad S_n(x) = \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}.$$

Exercice 17

1. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{Im}(e^{ikx}) \\
&= \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^{ix})^k 1^{n-k}\right) \\
&= \mathrm{Im}(1 + e^{ix})^n.
\end{aligned}$$

Or, $1 + e^{ix} = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}}$ d'après la dernière question de l'exercice 6 donc

$$(1 + e^{ix})^n = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) e^{\frac{inx}{2}}$$

d'où

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx) = \mathrm{Im}\left(2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) e^{\frac{inx}{2}}\right) = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{nx}{2}\right).$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}
(1 + i\sqrt{3})^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k \sqrt{3}^k = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k} i^{2k} \sqrt{3}^{2k} + \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} \binom{n}{2k+1} i^{2k+1} \sqrt{3}^{2k+1} \\
&= \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k} (-1)^k 3^k + i \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} \binom{n}{2k+1} (-1)^k \sqrt{3}^{2k+1}.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\displaystyle\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{n}{2k}(-1)^k3^k = \mathrm{Re}((1+i\sqrt{3})^n)$.

D'autre part, on a $1+i\sqrt{3} = 2\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc $(1+i\sqrt{3})^n = 2^ne^{in\frac{\pi}{3}}$.

Ainsi, $\mathrm{Re}((1+i\sqrt{3})^n) = 2^n\cos\left(n\dfrac{\pi}{3}\right)$.

On en conclut que

$$\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{n}{2k}(-3)^k = 2^n\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right).$$

Exercice 18

1. Calcul fait dans le poly : $\cos(5x) = 16\cos^5(x) - 20\cos^3(x) + 5\cos(x)$.
2. On applique la formule de la question précédente pour $x = \dfrac{\pi}{10}$. On obtient

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{5\pi}{10}\right) &= 16\cos^5\left(\frac{\pi}{10}\right) - 20\cos^3\left(\frac{\pi}{10}\right) + 5\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)\\
\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{10}\right)\left(16\cos^4\left(\frac{\pi}{10}\right) - 20\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) + 5\right)\\
\Leftrightarrow 0 &= 16\cos^4\left(\frac{\pi}{10}\right) - 20\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) + 5 \quad \text{car } \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \,\text{et}\, \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \neq 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$ est racine du trinôme $16x^2 - 20x + 5$ de discriminant

$$\Delta = (-20)^2 - 4\times 16\times 5 = 80 = (4\sqrt{5})^2.$$

On a donc $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{10}\right) = \dfrac{20-4\sqrt{5}}{32} = \dfrac{5-\sqrt{5}}{8} < \dfrac{1}{2}$ ou $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{10}\right) = \dfrac{5+\sqrt{5}}{8} > \dfrac{1}{2}$. Or, $0 < \dfrac{\pi}{10} < \dfrac{\pi}{4}$ donc par décroissance de la fonction cosinus sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, on a $\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right) > \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, d'où par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$, $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{10}\right) > \cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$.

On en déduit que $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{10}\right) = \dfrac{5+\sqrt{5}}{8}$ puis en utilisant que $\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right) > 0$, on en conclut que

$$\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}.$$