Devoir maison n°5
A rendre pour le Vendredi 22 novembre 2024

Problème : Fonctions hyperboliques

On considère les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperboliques définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

On considère également la fonction tangente hyperbolique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

1. Montrer que ch et sh sont respectivement la partie paire et la partie impaire de la fonction exponentielle réelle.
2. (a) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y) \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(y).$$

En déduire que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathrm{ch}(x-y) = \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y) - \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y) \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(x-y) = \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(y) - \mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(y).$$

   (b) Déduire de la question précédente que pour tout $x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.

   (c) Déduire des deux questions précédentes que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{ch}(2x) = \mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}^2(x) = 2\mathrm{ch}^2(x) - 1 = 1 + 2\mathrm{sh}^2(x) \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(2x) = 2\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(x).$$

3. (a) Justifier que ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et calculer leurs dérivées. En déduire que la fonction sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et calculer ses limites.

   (b) Dresser le tableau de variation de la fonction ch et calculer ses limites.
4. (a) Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'équation $\mathrm{sh}(x) = y$ admet une unique solution $x \in \mathbb{R}$.

   (b) En déduire que sh est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, de bijection réciproque argsh définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $\mathrm{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

   (c) Montrer que la fonction argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

5. (a) Montrer que pour tout $y \in [1, +\infty[$, l'équation $\mathrm{ch}(x) = y$ admet une unique solution $x \in \mathbb{R}_+$.

   (b) En déduire que ch est bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$, de bijection réciproque argch définie pour tout $x \in [1, +\infty[$ par $\mathrm{argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.

   (c) Montrer que la fonction argch est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que pour tout $x > 1$,

$$\mathrm{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

6. (a) Vérifier que la fonction th est impaire.
   (b) Justifier que th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée. En déduire que la fonction th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et calculer ses limites.
   (c) Montrer que pour tout $y \in]-1,1[$, l'équation $\text{th}(x) = y$ admet une unique solution $x \in \mathbb{R}$.
   (d) En déduire que th est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$, de bijection réciproque argth définie pour tout $x \in]-1,1[$ par $\text{argth}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.
   (e) Montrer que la fonction argth est dérivable sur $]-1,1[$ et que pour tout $x \in]-1,1[$,
$$\text{argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$