Corrigé du devoir surveillé de mathématiques n°2
Samedi 9 novembre 2024 (3h30)

Exercice 1 : Similitudes du plan complexe

1. (a) Soient A et B deux points de $\mathbb{R}^2$, soient z_A et z_B leurs affixes respectives. Soient A' et B' les points du plan d'affixes $s(z_A)$ et $s(z_B)$.
On a alors
$$A'B' = |s(z_B) - s(z_A)| = |(az_B + b) - (az_A + b)| = |a(z_B - z_A)| = |a||z_B - z_A|$$
donc $\boxed{A'B' = |a|AB.}$
Par ailleurs,
$$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}) \equiv \arg\left(\frac{s(z_B) - s(z_A)}{z_B - z_A}\right)[2\pi] \equiv \arg\left(\frac{a(z_B - z_A)}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$$
donc $\boxed{(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}) \equiv \arg(a)[2\pi].}$

(b) Avec les mêmes notations qu'en question précédente, on a
$$(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}}) \equiv \arg\left(\frac{s(z_C) - s(z_A)}{s(z_B) - s(z_A)}\right)[2\pi] \equiv \arg\left(\frac{a(z_C - z_A)}{a(z_B - z_A)}\right)[2\pi] \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$$
d'où $\boxed{(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})[2\pi].}$

(c) Soit $z' \in \mathbb{C}$. Cherchons les $z \in \mathbb{C}$ tels que $s(z) = z'$. On a
$$s(z) = z' \Leftrightarrow az + b = z' \Leftrightarrow z = \frac{z' - b}{a},$$
ce qui est possible car $a \neq 0$. Ainsi, $\dfrac{z' - b}{a}$ est l'unique antécédent de z' par s. Tout $z' \in \mathbb{C}$ admet un unique antécédent par s donc $\boxed{s \text{ est bijective}}$ de bijection réciproque
$$s^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{z}{a} - \dfrac{b}{a}. \end{array}$$
C'est bien une similitude directe (car $\dfrac{1}{a} \in \mathbb{C}^*$ et -$\dfrac{b}{a} \in \mathbb{C}$) de rapport $\left|\dfrac{1}{a}\right| = \dfrac{1}{|a|}$ et d'angle $\arg\left(\dfrac{1}{a}\right) \equiv -\arg(a)[2\pi]$.

(d) Soit $t : z \mapsto a'z + b'$, où $a' \in \mathbb{C}^*$ et $b' \in \mathbb{C}$. L'application t est une similitude directe de rapport $|a'|$ et d'angle $\arg(a')[2\pi]$.
On a pour tout $z \in \mathbb{C}$:
$$s \circ t(z) = s(a'z + b') = a(a'z + b') + b = aa'z + ab' + b.$$
Puisque $a \neq 0$ et $a' \neq 0$, on a bien $aa' \neq 0$ et $(ab' + b) \in \mathbb{C}$ donc $\boxed{s \circ t \text{ est une similitude directe}}$ de rapport $|aa'| = |a| \times |a'|$ et d'angle $\arg(aa') \equiv \arg(a) + \arg(a')[2\pi]$.

(e) On suppose désormais que $a \neq 1$. Soit $\omega \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes : $s(\omega) = \omega \Leftrightarrow a\omega + b = \omega \Leftrightarrow (1-a)\omega = b \Leftrightarrow \omega = \dfrac{b}{1-a}$, ce qui est possible car $1 - a \neq 0$ puisque $a \neq 1$.

La similitude directe s admet donc bien un unique point fixe qui est $\boxed{\omega = \dfrac{b}{1-a}.}$

On a alors pour tout $z \in \mathbb{C}, s(z) - \omega = s(z) - s(\omega) = az + b - (a\omega + b) = az - a\omega$ d'où $\boxed{\text{pour tout } z \in \mathbb{C}, s(z) - \omega = a(z - \omega).}$

2. (a) On a les équivalences suivantes : pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$u(z) = \overline{s(z)} \Leftrightarrow \overline{u(z)} = s(z) \Leftrightarrow s(z) = \overline{a\overline{z} + b},$$

ce qui équivaut à pour tout $z \in \mathbb{C}, s(z) = \overline{a}z + \overline{b}$, ce qui est bien l'expression d'une similitude directe puisque $\overline{a} \in \mathbb{C}^*$ (car $a \neq 0$) et $\overline{b} \in \mathbb{C}$.

(b) Soient A, B et C trois points du plan $\mathbb{R}^2$ d'affixes respectives z_A, z_B et z_C. Soient A', B' et C' les points d'afixes $u(z_A), u(z_B)$ et $u(z_C)$.
On a $A'B' = |u(z_B) - u(z_A)| = |\overline{s(z_B)} - \overline{s(z_A)}| = |\overline{s(z_B) - s(z_A)}| = |s(z_B) - s(z_A)|$ où s est la similitude directe définie à la question précédente.
Or, d'après la question 1.a), $|s(z_B) - s(z_A)| = |\overline{a}||z_B - z_A| = |a||z_B - z_A|$ donc $\boxed{A'B' = |a|AB.}$
Par ailleurs,

$$(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}}) \equiv \arg\left(\frac{u(z_C) - u(z_A)}{u(z_B) - u(z_A)}\right)[2\pi] \equiv \arg\left(\frac{a\overline{z_C - z_A}}{a\overline{\overline{z_B - z_A}}}\right)[2\pi] \equiv \arg\overline{\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)}[2\pi]$$

d'où $\boxed{(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}}) \equiv -\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)[2\pi] \equiv -(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})[2\pi].}$

(c) Soit $z' \in \mathbb{C}$. Cherchons les $z \in \mathbb{C}$ tels que $u(z) = z'$. On a

$$u(z) = z' \Leftrightarrow a\overline{z} + b = z' \overset{a \neq 0}{\Leftrightarrow} \overline{z} = \frac{z' - b}{a} \Leftrightarrow z = \overline{\left(\frac{z' - b}{a}\right)} = \frac{1}{\overline{a}}\overline{z'} - \overline{\left(\frac{b}{a}\right)}.$$

Ainsi, $\dfrac{1}{\overline{a}}\overline{z'} - \overline{\left(\dfrac{b}{a}\right)}$ est l'unique antécédent de z' par u. Tout $z' \in \mathbb{C}$ admet un unique antécédent par u donc $\boxed{u \text{ est bijective}}$ de bijection réciproque

$$u^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{1}{\overline{a}}\overline{z} - \overline{\left(\dfrac{b}{a}\right)} \end{array}$$

qui est bien une similitude indirecte puisque $\dfrac{1}{\overline{a}} \in \mathbb{C}^*$ (car $a \in \mathbb{C}^*$) et $-\overline{\left(\dfrac{b}{a}\right)} \in \mathbb{C}$.

(d) Soit $v : z \mapsto a'\overline{z} + b'$, où $(a', b') \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. On a pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$u \circ v(z) = u(a'\overline{z} + b') = a\overline{a'\overline{z} + b'} + b = a(\overline{a'}z + \overline{b'}) + b = a\overline{a'}z + a\overline{b'} + b.$$

Puisque $a \neq 0$ et $a' \neq 0$, on a $\overline{a'} \neq 0$ et $a\overline{a'} \neq 0$. Par ailleurs, $a\overline{b'} + b \in \mathbb{C}$ donc $\boxed{u \circ v \text{ est bien une similitude directe}}$ de rapport $|a\overline{a'}| = |a||\overline{a'}| = |a||a'|$ et d'angle $\arg(a\overline{a'}) \equiv \arg(a) + \arg(\overline{a'})[2\pi] \equiv \arg(a) - \arg(a')[2\pi]$.

(e) Soit $t : z \mapsto \alpha z + \beta$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ une similitude directe.
Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$t \circ u(z) = t(a\overline{z} + b) = \alpha(a\overline{z} + b) + \beta = a\alpha\overline{z} + \alpha b + \beta$$

où $a\alpha \in \mathbb{C}^*$ (car $a \neq 0$ et $\alpha \neq 0$) et $\alpha b+\beta \in \mathbb{C}$ donc $\boxed{t \circ u \text{ est une similitude indirecte.}}$

Exercice 2 : Deux équations trigonométriques

1. Par définition, on a

$$\begin{aligned} e^{ia} + e^{ib} + e^{ic} &= \cos(a) + i\sin(a) + \cos(b) + i\sin(b) + \cos(c) + i\sin(c) \\ &= (\cos(a) + \cos(b) + \cos(c)) + i(\sin(a) + \sin(b) + \sin(c)) \end{aligned}$$

d'où, par hypothèse de l'énoncé, $\boxed{e^{ia} + e^{ib} + e^{ic} = 0.}$

2. (a) En factorisant par e^{ic} dans l'égalité obtenue en question précédente, on trouve

$$e^{ia} + e^{ib} + e^{ic} = 0 \Leftrightarrow e^{ic}(e^{i(a-c)} + e^{i(b-c)} + 1) = 0.$$

Or, $e^{ic} \neq 0$ donc on en déduit, avec les notations de l'énoncé, que $\boxed{1 + e^{i\alpha} + e^{i\beta} = 0.}$

(b) En prenant la partie imaginaire de l'égalité obtenue en question précédente, on trouve

$$0 = \mathrm{Im}(1 + e^{i\alpha} + e^{i\beta}) = \mathrm{Im}(e^{i\alpha}) + \mathrm{Im}(e^{i\beta}) = \sin(\alpha) + \sin(\beta)$$

donc $\boxed{\sin(\alpha) = -\sin(\beta).}$
Par imparité de sin, ceci implique que $\sin(\alpha) = \sin(-\beta)$ d'où $\alpha \equiv -\beta[2\pi]$ ou $\alpha \equiv \pi - (-\beta)[2\pi]$, i.e. $\boxed{\alpha \equiv -\beta[2\pi] \text{ ou } \alpha \equiv \pi + \beta[2\pi].}$.

(c) • Si $\sin(\beta) \geqslant 0$, on a bien $\sin(\alpha) \geqslant 0$ ou $\sin(\beta) \geqslant 0$.
• Supposons que $\sin(\beta) < 0$.
Si $\alpha \equiv -\beta[2\pi]$, alors $\sin(\alpha) = \sin(-\beta) = -\sin(\beta) > 0$.
Si $\alpha \equiv \pi + \beta[2\pi]$, alors $\sin(\alpha) = \sin(\pi + \beta) = -\sin(\beta) > 0$.
Dans les deux cas, $\sin(\alpha) > 0$ donc on a bien $\sin(\alpha) \geqslant 0$ ou $\sin(\beta) \geqslant 0$.
Finalement, dans tous les cas, $\boxed{\sin(\alpha) \geqslant 0 \text{ ou } \sin(\beta) \geqslant 0.}$

(d) En prenant la partie réelle de l'égalité trouvée en question 2.a), on obtient

$$0 = \mathrm{Re}(1 + e^{i\alpha} + e^{i\beta}) = 1 + \mathrm{Re}(e^{i\alpha}) + \mathrm{Re}(e^{i\beta})$$

d'où $\boxed{1 + \cos(\alpha) + \cos(\beta) = 0.}$
D'après la question 2.b), on a $\alpha \equiv -\beta[2\pi]$ ou $\alpha \equiv \pi+\beta[2\pi]$. Si on avait $\alpha \equiv \pi+\beta[2\pi]$, on aurait $\cos(\alpha) = \cos(\pi + \beta) = -\cos(\beta)$ donc d'après l'égalité qu'on vient de trouver, il s'ensuit que

$$0 = 1 + \cos(\alpha) + \cos(\beta) = 1 - \cos(\beta) + \cos(\beta) = 1,$$

ce qui est absurde. On a donc nécessairement $\boxed{\alpha \equiv -\beta[2\pi].}$

(e) Puisque $\alpha \equiv -\beta[2\pi]$, on a $\cos(\alpha) = \cos(-\beta) = \cos(\beta)$. D'après la question précédente, ceci implique que $0 = 1 + 2\cos(\alpha)$ d'où $\boxed{\cos(\alpha) = \cos(\beta) = -\frac{1}{2}.}$

D'après l'égalité fondamentale de la trigonométrie, il vient

$$\sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

d'où $\sin(\alpha) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Or, d'après l'hypothèse faite dans l'énoncé, $\sin(\alpha) \geqslant 0$ donc $\boxed{\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}.}$

Enfin, d'après la question 2.b), $\boxed{\sin(\beta) = -\sin(\alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.}$

Ainsi, $e^{i\alpha} = \cos(\alpha)+i\sin(\alpha) = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ d'où $\boxed{e^{i\alpha} = e^{\frac{2i\pi}{3}} = j.}$

Puis $e^{i\beta} = \cos(\beta)+i\sin(\beta) = -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ d'où $\boxed{e^{i\beta} = e^{\frac{4i\pi}{3}} = j^2.}$

En effet, d'après la formule de Moivre, $j^2 = (e^{\frac{2i\pi}{3}})^2 = e^{2\times\frac{2i\pi}{3}} = e^{\frac{4i\pi}{3}}$.

(f) Par définition, on a $e^{i\alpha} = e^{i(a-c)} = e^{ia}e^{-ic}$.

Or, d'après la question précédente, $e^{i\alpha} = j$ donc $e^{ia}e^{-ic} = j$ d'où $\boxed{e^{ia} = je^{ic}}$.

De même, on a $j^2 = e^{i\beta} = e^{ib}e^{-ic}$ d'où $\boxed{e^{ib} = j^2e^{ic}}$.

(g) Pour $c = 0$, on a $e^{ic} = 1$ d'où $e^{ia} = j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $e^{ib} = j^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}}$.

En posant $a = \frac{2\pi}{3}$ et $b = \frac{4\pi}{3}$, on a alors

$$\cos(a) + \cos(b) + \cos(c) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \cos(0) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 0$$

et

$$\sin(a) + \sin(b) + \sin(c) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \sin(0) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

$\boxed{\text{Ainsi, les réels } (a,b,c) = \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 0\right) \text{ conviennent.}}$

3. On a d'après la formule de Moivre :

$$\begin{aligned} e^{2ia} + e^{2ib} + e^{2ic} &= (e^{ia})^2 + (e^{ib})^2 + (e^{ic})^2 \\ &= (je^{ic})^2 + (j^2e^{ic})^2 + (e^{ic})^2 \quad \text{d'après la question 2.f)} \\ &= (e^{ic})^2(j^2 + j^4 + 1). \end{aligned}$$

Or, d'après la formule de Moivre, on a $j^4 = (e^{\frac{2i\pi}{3}})^4 = e^{\frac{8i\pi}{3}} = e^{\frac{2i\pi}{3}} = j$ donc

$$j^2 + j^4 + 1 = j^2 + j + 1 = e^{\frac{4i\pi}{3}} + e^{\frac{2i\pi}{3}} + 1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 0$$

donc $\boxed{e^{2ia} + e^{2ib} + e^{2ic} = 0.}$

On en déduit que $\mathrm{Re}(e^{2ia} + e^{2ib} + e^{2ic}) = 0$, i.e. $\boxed{\cos(2a) + \cos(2b) + \cos(2c) = 0.}$

De même, on a $\mathrm{Im}(e^{2ia} + e^{2ib} + e^{2ic}) = 0$, donc $\boxed{\sin(2a) + \sin(2b) + \sin(2c) = 0.}$

4. Soit n un entier naturel non divisible par 3, c'est à dire qui ne s'écrit pas sous la forme $n = 3k$, pour $k \in \mathbb{N}$.
On a en utilisant la formule de Moivre et les questions précédentes :
$$\begin{aligned} e^{ina} + e^{inb} + e^{inc} &= (je^{ic})^n + (j^2e^{ic})^n + (e^{ic})^n \\ &= e^{inc}(1 + j^n + j^{2n}). \end{aligned}$$
Il y a deux cas :
• **1er cas :** il existe $k \in \mathbb{N}, n = 3k+1$. On a alors $j^n = j^{3k+1} = (j^3)^k \times j$.
Or, $j^3 = (e^{\frac{2i\pi}{3}})^3 = e^{3\times\frac{2i\pi}{3}} = e^{2i\pi} = 1$ donc $j^n = 1^k \times j = j$.
Il s'ensuit que $j^{2n} = (j^n)^2 = j^2$ donc $1 + j^n + j^{2n} = 1 + j + j^2 = 0$ d'après la question précédente, ce qui prouve que $e^{ina} + e^{inb} + e^{inc} = 0$.
• **2ème cas :** il existe $k \in \mathbb{N}, n = 3k+2$.
On a alors $j^n = j^{3k+2} = (j^3)^k \times j^2 = 1^k \times j^2 = j^2$ et $j^{2n} = (j^n)^2 = (j^2)^2 = j^4 = j^3 \times j = 1 \times j = j$.
Ainsi, $1 + j^n + j^{2n} = 1 + j^2 + j = 0$, ce qui prouve que $e^{ina} + e^{inb} + e^{inc} = 0$.
Dans les deux cas, on a bien $\boxed{e^{ina} + e^{inb} + e^{inc} = 0.}$
De même qu'en question précédente, en prenant les parties réelle et imaginaire respectivement, on en conclut que $\boxed{\cos(na) + \cos(nb) + \cos(nc) = 0}$ et $\boxed{\sin(na) + \sin(nb) + \sin(nc) = 0.}$

Exercice 3 : Points fixes d'une permutation

1. Il y a $n!$ permutations de $[\![1, n]\!]$, donc il y a $\boxed{n! \text{ tirages possibles.}}$
2. Dans cette question, on pose $n = 4$. On étudie donc les permutations de l'ensemble $[\![1, 4]\!]$.
• Soit $p = 0$. On cherche à calculer $F(4, 0)$, c'est à dire le nombre de permutations de $[\![1, 4]\!]$ sans points fixes. En faisant la liste des permutations possibles, on constate que celles qui n'ont pas de points fixes sont les suivantes :
$$(2,1,4,3), (2,3,4,1), (2,4,1,3), (3,1,4,2), (3,4,1,2), (3,4,2,1), (4,1,2,3), (4,3,1,2), (4,3,2,1).$$
Il y en a 9 donc $\boxed{F(4, 0) = 9.}$
• Soit $p = 1$. Les permutations qui possèdent un seul point fixe sont les suivantes :
$$(1,3,4,2), (1,4,2,3), (2,3,1,4), (2,4,3,1), (3,1,2,4), (3,2,4,1), (4,1,3,2), (4,2,1,3).$$
Il y en a 8 donc $\boxed{F(4, 1) = 8.}$
• Soit $p = 2$. Les permutations qui possèdent exactement deux points fixes sont les suivantes :
$$(1,2,4,3), (1,4,3,2), (1,3,2,4), (2,1,3,4), (3,2,1,4), (4,2,3,1).$$
Il y en a 6 donc $\boxed{F(4, 2) = 6.}$
• Soit $p = 3$. Si une permutation possède 3 points fixes, nécessairement le 4ème point sera également fixé. Il ne peut donc pas exister de permutation de $[\![1, 4]\!]$ qui possède exactement 3 points fixes.
Ainsi, $\boxed{F(4, 3) = 0.}$
• Enfin, pour $p = 4$, la seule permutation qui possède 4 points fixes est la permutation $(1, 2, 3, 4)$ donc $\boxed{F(4, 4) = 1.}$
On remarque qu'on a bien épuisé toutes les permutations possibles puisque
$$F(4, 0) + F(4, 1) + F(4, 2) + F(4, 3) + F(4, 4) = 24 = 4!.$$

3. La seule permutation qui possède n points fixes est la permutation $(1, 2, 3, \dots, n)$ donc $\boxed{F(n, n) = 1.}$
Comme expliqué à la question précédente, dès lors qu'une permutation admet $n-1$ points fixes, le dernier point est lui-même nécessairement fixé également donc il n'existe pas de permutation qui admette exactement $n-1$ points fixes.
Ainsi, $\boxed{F(n, n-1) = 0.}$
4. Notons A l'ensemble des tirages possibles. D'après la première question, $\text{card}(A) = n!$.
Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, notons $A_{n,k}$ l'ensemble des tirages admettant exactement k points fixes. Par définition, pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, on a $\text{card}(A_{n,k}) = F(n, k)$.
Puisque tout tirage admet un et un seul nombre de points fixes, on a l'union disjointe
$$A = \bigsqcup_{k=0}^{n} A_{n,k}$$
donc $\text{card}(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \text{card}(A_{n,k})$ d'où
$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} F(n, k) = n!.}$$
5. Soit $k \in [\![0, n]\!]$.
Dénombrons le nombre de tirage de n boules qui possèdent k points fixes.
• Tout d'abord, on choisit les k points fixes : il y a $\binom{n}{k}$ possibilités.
• Ensuite, il faut permuter les $n-k$ entiers restants sans point fixe, pour ne conserver que k points fixes au total. Cela revient donc à dénombrer le nombre de permutations de $n-k$ éléments sans points fixes : il y a donc ω_{n-k} possibilités.
Au final, il y a donc $\binom{n}{k}\omega_{n-k}$ tirages qui possèdent exactement k points fixes donc
$$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!], F(n, k) = \binom{n}{k}\omega_{n-k}.}$$
6. On a
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{\omega_k}{k!(n-k)!} &= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\omega_k \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\omega_k \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k}\omega_k \quad \text{car } \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\omega_{n-i} \quad (i = n-k) \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n} F(n, i) \quad \text{d'après la question précédente} \\
&= \frac{n!}{n!} \quad \text{d'après la question 4} \\
&= 1
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{\omega_k}{k!(n-k)!} = 1.}$$

7. (a) D'après la question précédente, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{\omega_k}{k!(n+1-k)!} = 1$ d'où

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\omega_k}{k!(n+1-k)!} + \frac{\omega_{n+1}}{(n+1)!} = 1$$

ou encore

$$\boxed{\frac{\omega_{n+1}}{(n+1)!} = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega_k}{(n+1-k)!k!}.}$$

(b) Montrons par récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\frac{\omega_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

• Initialisation : pour $n = 0, \omega_0 = F(0,0) = 1$ par définition donc $\displaystyle\frac{\omega_0}{0!} = 1$.

D'autre part, $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{(-1)^0}{0!} = 1$.

On a donc bien $\displaystyle\frac{\omega_0}{0!} = \sum_{k=0}^{0} \frac{(-1)^k}{k!}$, ce qui prouve la propriété au rang $n = 0$.

• Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\displaystyle\frac{\omega_k}{k!} = \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i}{i!}$.

Montrons que $\displaystyle\frac{\omega_{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!}$.

En utilisant la question précédente puis l'hypothèse de récurrence forte, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\omega_{n+1}}{(n+1)!} &= 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega_k}{(n+1-k)!k!} \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n+1-k)!} \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i}{i!} \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n+1-k)!} \left(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-1)^i}{i!} + \frac{(-1)^k}{k!} \right) \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n+1-k)!} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-1)^i}{i!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(n+1-k)!k!}.
\end{aligned}$$

Dans la première somme, si $k = 0$, alors la somme $\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-1)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{-1} \frac{(-1)^i}{i!}$ est nulle donc on peut faire partir la première somme de $k = 1$ puis on fait le changement d'indice $j = k - 1$. Dans la deuxième somme, on va ajouter et soustraire le terme d'indice $n+1$ pour faire apparaître un binôme de Newton. On obtient donc

$$\begin{aligned}
\frac{\omega_{n+1}}{(n+1)!} &= 1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+1-k)!}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(-1)^i}{i!}-\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(-1)^k}{(n+1-k)!k!}+\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\\
&= 1-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{(n-j)!}\sum_{i=0}^{j}\frac{(-1)^i}{i!}-\frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!k!}(-1)^k+\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, on a pour tout $j\in[\![0,n-1]\!]$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{j}\frac{(-1)^i}{i!}=\frac{\omega_j}{j!}$ donc en remplaçant dans la première somme, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\omega_{n+1}}{(n+1)!} &= 1-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{(n-j)!}\frac{\omega_j}{j!}-\frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}1^{n+1-k}(-1)^k+\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\\
&= \frac{\omega_n}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}(1-1)^{n+1}+\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\text{(en appliquant la question précédente à } n-1\text{)}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}+\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\text{(en utilisant l'hypothèse de récurrence)}\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\frac{(-1)^k}{k!},
\end{aligned}$$

ce qui prouve la formule au rang $n+1$ et achève la récurrence.
Ainsi, on a bien montré que

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{\omega_n}{n!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}.}$$

Remarque : on a utilisé la formule de la question précédente au rang $n-1$, ce qui peut poser problème si $n=0$. Mais dans ce cas, on a $\omega_1=0$ (en effet, il n'existe pas de tirage d'une seule boule sans point fixe) et on a bien

$$\sum_{k=0}^{1}\frac{(-1)^k}{k!}=1-1=0.$$