Lycée Fénelon
Année 2024-2025

BCPST1
A. Panetta

Devoir surveillé de mathématiques n°2

Samedi 9 novembre 2024 (3h30)

L'énoncé est constitué de trois exercices et comporte 4 pages.
Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, la précision et la concision de la rédaction. Le soin de la copie ainsi que l'orthographe entreront également pour une part importante dans l'appréciation du travail rendu.
Les résultats doivent être encadrés.
Si un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 : Similitudes du plan complexe

On considère $\mathbb{R}^2$ muni de son repère orthonormé canonique $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où O est le point de coordonnées $(0,0)$, et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont les vecteurs de coordonnées resepctives $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.
On appelle similitude directe du plan complexe toute application de la forme

$$s: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & az+b \end{array}$$

où $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.
On appelle similitude indirecte du plan complexe toute application de la forme

$$u: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & a\overline{z}+b \end{array}$$

où $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

1. Dans cette question, on fixe une similitude directe $s : z \mapsto az + b$ où $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. Pour tout point A du plan $\mathbb{R}^2$ d'affixe z_A, on note A' le point d'affixe $s(z_A)$.
   (a) Montrer que pour tous points A et B de $\mathbb{R}^2$, on a
   $$A'B' = |a|AB \quad \text{et} \quad (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}) \equiv \arg(a)[2\pi].$$
   On dit que s est une similitude de rapport $|a|$ et d'angle $\arg(a)$.
   (b) Montrer que pour tous points A, B et C de $\mathbb{R}^2$, on a
   $$(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})[2\pi].$$
   On dit que s conserve les angles orientés.
   (c) Montrer que s est bijective et que sa bijection réciproque est une similitude directe dont on précisera le rapport et un angle.
   (d) Soit $t : z \mapsto a'z + b'$ une autre similitude directe. Vérifier que $s \circ t$ est une similitude directe dont on précisera le rapport et un angle en fonction de ceux de s et t.
   (e) Montrer que si $a \neq 1$, il existe un unique nombre complexe ω tel que $s(\omega) = \omega$ (on dit que ω est l'unique point fixe de s, ou le centre de la similitude directe s). En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C}, s(z) - \omega = a(z - \omega)$.
2. Dans cette question, on fixe une similitude indirecte $u : z \mapsto a\overline{z} + b$ où $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. Pour tout point A du plan $\mathbb{R}^2$ d'affixe z_A, on note A' le point d'affixe $u(z_A)$.
   (a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe s telle que
   $$\text{pour tout}\, z \in \mathbb{C}, u(z) = \overline{s(z)}.$$
   (b) Montrer que pour tous points A, B et C de $\mathbb{R}^2$, on a
   $$A'B' = |a|AB \quad \text{et} \quad (\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}}) \equiv -(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})[2\pi].$$
   (c) Montrer que u est bijective et que sa bijection réciproque est une similitude indirecte.
   (d) Soit $v : z \mapsto a'\overline{z} + b'$ une autre similitude indirecte. Montrer que $u \circ v$ est une similitude directe dont on précisera le rapport et un angle.
   (e) Soit $t : z \mapsto \alpha z + \beta$ une similitude directe. Que peut-on dire de la composée $t \circ u$?

Exercice 2 : Deux équations trigonométriques

Soient a, b, c trois réels tels que

$$\cos(a) + \cos(b) + \cos(c) = 0 \quad \text{et} \quad \sin(a) + \sin(b) + \sin(c) = 0.$$

1. Montrer que $e^{ia} + e^{ib} + e^{ic} = 0$.
2. Dans cette question, on pose $\alpha = a - c$ et $\beta = b - c$.
   (a) Montrer que $1 + e^{i\alpha} + e^{i\beta} = 0$.
   (b) En déduire que $\sin(\alpha) = -\sin(\beta)$ puis que $\alpha \equiv -\beta[2\pi]$ ou $\alpha \equiv \pi + \beta[2\pi]$.
   (c) Justifier que $\sin(\alpha) \geqslant 0$ ou $\sin(\beta) \geqslant 0$.

   Quitte à échanger α et β, on peut donc dorénavant supposer que $\sin(\alpha) \geqslant 0$.

   (d) Montrer que $1+\cos(\alpha)+\cos(\beta) = 0$ et en déduire qu'on a nécessairement $\alpha \equiv -\beta[2\pi]$.
   (e) Calculer $\cos(\alpha), \sin(\alpha), \cos(\beta)$ et $\sin(\beta)$ puis en déduire les valeurs de $e^{i\alpha}$ et $e^{i\beta}$.
   (f) En déduire que $e^{ia} = je^{ic}$ et $e^{ib} = j^2e^{ic}$, où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
   (g) Donner un exemple de réels a, b et c qui conviennent.
3. Montrer que $e^{2ia} + e^{2ib} + e^{2ic} = 0$ et en déduire que

$$\cos(2a) + \cos(2b) + \cos(2c) = 0 \quad \text{et} \quad \sin(2a) + \sin(2b) + \sin(2c) = 0.$$

4. Soit n un entier naturel qui n'est pas divisible par 3. Montrer que $e^{ina} + e^{inb} + e^{inc} = 0$ et en déduire que

$$\cos(na) + \cos(nb) + \cos(nc) = 0 \quad \text{et} \quad \sin(na) + \sin(nb) + \sin(nc) = 0.$$

   Indication : on pourra écrire n sous la forme $3k + 1$ ou $3k + 2$ avec $k \in \mathbb{N}$ et traiter séparément les deux cas.

Exercice 3 : Points fixes d'une permutation

Soit n un entier naturel non nul.
On dispose d'une urne qui contient n boules numérotées de 1 à n. On réalise l'expérience suivante : on tire successivement, et sans remise, toutes les boules de l'urne.

Pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, on dit que i est un **point fixe** du tirage si la boule i a été tirée à la i-ème position.
Exemple : si l'urne contient quatre boules, le tirage $(3, 2, 1, 4)$ admet 2 et 4 pour points fixes, mais le tirage $(2, 3, 4, 1)$ n'admet pas de point fixe.

Pour tout $p \in [\![0; n]\!]$, on note $F(n, p)$ le nombre de tirages qui admettent exactement p points fixes.
Par convention, on pose également $F(0, 0) = 1$.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles au total ?
2. Pour tout $p \in [\![0; 4]\!]$, calculer $F(4, p)$.
3. Evaluer $F(n, n)$ et $F(n, n - 1)$.
4. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} F(n, k) = n!$.

   Posons $\omega_n = F(n, 0)$, le nombre de tirages sans point fixe.

5. Montrer que, pour tout entier $k \in [\![0;n]\!]$, on a $F(n,k) = \binom{n}{k}\omega_{n-k}$.

6. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\omega_k}{k!(n-k)!} = 1$.

7. (a) En appliquant le résultat de la question précédente à $n+1$, montrer que

$$\frac{\omega_{n+1}}{(n+1)!} = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega_k}{(n+1-k)!k!}.$$

(b) En raisonnant par récurrence forte, en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{\omega_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$