9

Equations différentielles linéaires simples

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle réel.

Une équation différentielle linéaire est une équation qui relie une fonction $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et ses dérivées successives de la forme :

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_2(t)y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = f(t),$$

où pour tout $i \in [\![0, n-1]\!], a_i$ est une fonction continue sur I et f est une fonction continue sur I appelée le second membre de l'équation.

9.1 Equations du premier ordre

Dans cette section, on s'intéresse aux équations différentielles linéaires d'ordre 1, i.e. des équations de la forme

$$y'(t) + a(t)y(t) = f(t),$$

où a et f sont des fonctions continues sur I. La fonction f est appelée le second membre de l'équation.

Résoudre une telle équation revient à trouver les fonctions $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables sur I qui vérifient cette équation.

9.1.1 Equation homogène associée

Définition 1: Equation homogène associée

Soit $(E) : y'(t) + a(t)y(t) = f(t)$ une équation différentielle linéaire du premier ordre où a et f sont des fonctions continues sur I.
On appelle équation homogène associée à l'équation (E) l'équation

$$(H) : y'(t) + a(t)y(t) = 0.$$

Théorème 1: Résolution d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre

On considère une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre

$$(H) : y'(t) + a(t)y(t) = 0,$$

où a une fonction continue sur I.
Soit A une primitive de a sur I.
L'ensemble des solutions y de (H) sur I est

$$\mathcal{S}_H = \{t \longmapsto y(t) = \lambda e^{-A(t)}, \lambda \in \mathbb{R}.\}$$

Remarque 1. • L'existence d'une primitive de a sur I est assurée par le théorème fondamental de l'analyse, puisque a est continue sur I.

• L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre est donc infini.

Démonstration. Raisonnons par double inclusion.

• Montrons que $\{t \longmapsto y(t) = \lambda e^{-A(t)}, \lambda \in \mathbb{R}.\} \subset \mathcal{S}_H$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $y : t \longmapsto \lambda e^{-A(t)}$ dérivable sur I.

On a pour tout $t \in I$,

$$y'(t) + a(t)y(t) = -\lambda A'(t)e^{-A(t)} + \lambda a(t)e^{-A(t)} = -\lambda a(t)e^{-A(t)} + \lambda a(t)e^{-A(t)} = 0$$

donc y est solution de (H).

On a donc bien montré l'inclusion $\{t \longmapsto y(t) = \lambda e^{-A(t)}, \lambda \in \mathbb{R}.\} \subset \mathcal{S}_H$.

• Montrons que $\mathcal{S}_H \subset \{t \longmapsto y(t) = \lambda e^{-A(t)}, \lambda \in \mathbb{R}.\}$.

Soit $y \in \mathcal{S}_H$. Pour tout $t \in I$, on a $y'(t) = -a(t)y(t)$.

Posons $z(t) = y(t)e^{A(t)}$. La fonction z est dérivable sur I comme produit de fonctions dérivables sur I et on a pour tout $t \in I$,

$$z'(t) = y'(t)e^{A(t)} + y(t)A'(t)e^{A(t)} = -a(t)y(t)e^{A(t)} + y(t)a(t)e^{A(t)} = 0$$

donc la fonction z est constante sur I.

Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in I, z(t) = \lambda$, i.e. $y(t)e^{A(t)} = \lambda$ d'où $y(t) = \lambda e^{-A(t)}$.

On a donc bien montré l'inclusion $\mathcal{S}_H \subset \{t \longmapsto y(t) = \lambda e^{-A(t)}, \lambda \in \mathbb{R}.\}$.

Finalement, $\mathcal{S}_H = \{t \longmapsto y(t) = \lambda e^{-A(t)}, \lambda \in \mathbb{R}.\}$. ■

Remarque 2. Rappelons les primitives usuelles :

$f(x)$	$F(x)$	Domaine
$a, a \in \mathbb{R}$	ax	$\mathbb{R}$
e^{ax} $(a \neq 0)$	$\frac{1}{a}e^{ax}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a}\ln(\lvert ax+b\rvert)$	$\mathbb{R} \setminus \{-\frac{b}{a}\}$
x^α, $\alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}$ si $\alpha\in\mathbb{N}$, $\mathbb{R}^*$ si $\alpha\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$, $\mathbb{R}_+^*$ si $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$
$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$	$\mathbb{R}_+^*$
a^x, $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$	$\frac{1}{\ln(a)}a^x$	$\mathbb{R}$
$\cos(ax+b)$, $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$\sin(ax+b)$, $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[, k \in \mathbb{Z}$
$\tan(x)$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$	$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[, k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$

Enfin, le tableau suivant s'obtient en utilisant la formule de dérivation d'une composée de fonctions dérivables.

Soit $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. La troisième ligne est valable si $u(I) \subset \mathbb{R}^*$ et la quatrième si $u(I) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Fonction	Primitive
$u'e^u$	e^u
$u'u^n$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u\rvert)$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$u'\sin(u)$	$-\cos(u)$
$u'\cos(u)$	$\sin(u)$

Exemple 1. • Si a est une constante réelle, les solutions de l'équation homogène

$$(H) : y'(t) + ay(t) = 0$$

sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $y(t) = \lambda e^{-at}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

En particulier, les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ égales à leur dérivée vérifient pour tout réel $t, y'(t) = y(t)$, i.e. $y'(t) - y(t) = 0$.

Ce sont donc les fonctions de la forme $y(t) = \lambda e^t$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

• Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $(H) : y'(t) + ty(t) = 0$ sont les fonctions de la forme $y(t) = \lambda e^{-\frac{t^2}{2}}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

• Les solutions sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ de l'équation $(H) : y'(t) + \tan(t)y(t) = 0$ sont de la forme $y(t) = \lambda e^{\ln(\lvert\cos(t)\rvert)} = \lambda\lvert\cos(t)\rvert = \lambda\cos(t)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

9.1.2 Résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre

Théorème 2: Structure des solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre

Soit $(E) : y'(t) + a(t)y(t) = f(t)$ où a et f sont des fonctions continues sur I.
Soit A une primitive de a sur I.
Soit y_p une solution particulière de (E) sur I.
L'ensemble des solutions y de (E) sur I est

$$\mathcal{S}_E = \{t \longmapsto y(t) = \lambda e^{-A(t)} + y_p(t), \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Autrement dit, l'ensemble des solutions de (E) est la somme d'une solution générale de l'équation homogène associée et de la solution particulière y_p.

Démonstration. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
y - y_p \in \mathcal{S}_H &\Leftrightarrow \forall t \in I, (y - y_p)'(t) + a(t)(y - y_p)(t) = 0 \\
&\Leftrightarrow y'(t) - y_p'(t) + a(t)y(t) - a(t)y_p(t) = 0 \\
&\Leftrightarrow y'(t) + a(t)y(t) = y_p'(t) + a(t)y_p(t) \\
&\Leftrightarrow y'(t) + a(t)y(t) = f(t) \quad \text{car } y_p \in \mathcal{S}_E \\
&\Leftrightarrow y \in \mathcal{S}_E.
\end{aligned}$$

Finalement, on a montré que

$$y \in \mathcal{S}_E \Leftrightarrow y - y_p \in \mathcal{S}_H \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall t \in I, y(t) - y_p(t) = \lambda e^{-A(t)} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall t \in I, y(t) = \lambda e^{-A(t)} + y_p(t).$$

■

Remarque 3. • En particulier, y est solution de (E) si et seulement si $y - y_p$ est solution de (H).

• Pour résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec second membre, il est donc nécessaire de résoudre l'équation homogène associée puis de trouver une solution particulière à l'équation avec second membre. Pour cela, plusieurs méthodes sont possibles.

Exemple 2. Dans le cas où a et f sont constantes, on a une équation sur $\mathbb{R}$ de la forme $(E) : y'(t) + ay(t) = b$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

• Si $a = 0$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}, y'(t) = b$, ce qui implique qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $t \in \mathbb{R}, y(t) = bt + \lambda$.

• Supposons que $a \neq 0$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène $(H) : y'(t) + ay(t) = 0$ sont les fonctions de la forme $y(t) = \lambda e^{-at}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ensuite, on cherche une solution particulière y_p constante.

On trouve alors pour tout $t \in I, y_p(t) = \dfrac{b}{a}$.

Ainsi, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont

$$\mathcal{S}_E = \left\{t \longmapsto y(t) = \lambda e^{-at} + \frac{b}{a}\right\}.$$

Il n'est pas nécessaire que a et f soient constantes pour chercher des solutions particulières constantes.

Exemple 3. Soit $(E) : y'(t) + ty(t) = t$. On constate que la fonction constante égale à 1 est une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$.

Néanmoins, dans la plupart des cas, il n'existe pas de solution constante et il faut chercher des solutions particulières en employant la méthode de variation de la constante.

9.1.3 Méthode de variation de la constante

Expliquons le principe de la méthode de variation de la constante.
Soit $(E) : y'(t) + a(t)y(t) = f(t)$, où a et f sont des fonctions continues sur I.
• On commence par résoudre $(H) : y'(t) + a(t)y(t) = 0$ l'équation homogène associée à (E).
Soit A une primitive de a sur I. Alors les solutions de (H) sur I sont

$$\mathcal{S}_H = \{t \longmapsto y(t) = \lambda e^{-A(t)}, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

• On cherche ensuite une solution particulière y_p de (E) sur I sous la forme

$$y_p(t) = \lambda(t)e^{-A(t)},$$

où $\lambda : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à déterminer. Autrement dit, on reprend la solution générale de $\mathcal{S}_H$ et on fait « varier la constante ».
On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} y_p \text{ est solution de } (E) \text{ sur } I &\Leftrightarrow \forall t \in I, y_p'(t) + a(t)y_p(t) = f(t) \\ &\Leftrightarrow \forall t \in I, (\lambda'(t) - A'(t)\lambda(t) + a(t)\lambda(t))e^{-A(t)} = f(t) \\ &\Leftrightarrow \forall t \in I, \lambda'(t) = f(t)e^{A(t)}. \end{aligned}$$

Puisque la fonction $t \longmapsto f(t)e^{A(t)}$ est continue sur I, elle admet une primitive B sur I, ce qui permet de déterminer que pour tout $t \in I, \lambda(t) = B(t) + \lambda$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.
On obtient donc y_p, à savoir que pour tout $t \in I$,

$$y_p(t) = \lambda(t)e^{-A(t)} = (B(t) + \lambda)e^{-A(t)} = \lambda e^{-A(t)} + B(t)e^{-A(t)}.$$

En fait, on retrouve l'ensemble des solutions de (E), à savoir la somme de la solution générale de $\mathcal{S}_H$ et d'une solution particulière de (E), en l'occurrence $t \longmapsto B(t)e^{-A(t)}$ ici.

Remarque 4. Cette méthode justifie également qu'il existe effectivement toujours des solutions aux équations différentielles linéaires d'ordre 1.

Exemple 4. Soit $(E) : y'(t) + \dfrac{1}{t}y(t) = e^t$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
• L'équation homogène associée est $(H) : y'(t) + \dfrac{1}{t}y(t) = 0$.
La fonction ln est une primitive de $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc les solutions de (H) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions de la forme $y(t) = \lambda e^{-\ln(t)} = \dfrac{\lambda}{t}$.
Ainsi, $\mathcal{S}_H = \left\{t \longmapsto y(t) = \dfrac{\lambda}{t}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.
• On cherche une solution particulière y_p de (E) sur I sous la forme $y_p(t) = \dfrac{\lambda(t)}{t}$, où λ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} y_p \text{ est solution de } (E) \text{ sur } I &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+^*, y_p'(t) + \frac{1}{t}y_p(t) = e^t \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \frac{\lambda'(t)}{t} - \frac{\lambda(t)}{t^2} + \frac{\lambda(t)}{t^2} = e^t \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \lambda'(t) = te^t. \end{aligned}$$

Il s'agit désormais de trouver une primitive de $t \longmapsto te^t$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $F : t \longmapsto \int_1^t xe^x dx$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction F est l'unique primitive de $t \longmapsto te^t$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 1.

Soit $t > 0$. On obtient au moyen d'une intégration par parties

$$F(t) = [xe^x]_1^t - \int_1^t e^x dx = te^t - e - [e^x]_1^t = te^t - e - e^t + e = e^t(t-1).$$

Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t > 0, \lambda(t) = e^t(t-1) + \lambda$.

Ainsi, pour tout $t > 0, y_p(t) = \dfrac{\lambda}{t} + e^t \dfrac{t-1}{t}$.

Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont donc

$$\mathcal{S}_E = \left\{ t \longmapsto y(t) = \frac{\lambda}{t} + e^t \frac{t-1}{t}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

9.1.4 Principe de superposition

Le principe de superposition est une méthode complémentaire de la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière à une équation différentielle lorsque son second membre est une somme de fonctions.

Proposition 1: Principe de superposition

Soit $(E) : y'(t) + a(t)y(t) = \sum_{k=1}^{n} f_k(t)$, où les fonctions $a, f_1, \dots, f_n$ sont continues sur I.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note y_k une solution particulière sur I de l'équation

$$(E_k) : y'(t) + a(t)y(t) = f_k(t).$$

Alors la fonction $y_p = \sum_{k=1}^{n} y_k$ est une solution particulière de (E) sur I.

Démonstration. Par hypothèse, on a pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et pour tout $t \in I$,

$$y_k'(t) + a(t)y_k(t) = f_k(t).$$

La fonction y_p est dérivable sur I comme somme de fonctions dérivables sur I et on a pour tout $t \in I$,

$$y_p'(t) + a(t)y_p(t) = \sum_{k=1}^{n} (y_k'(t) + a(t)y_k(t)) = \sum_{k=1}^{n} f_k(t),$$

donc y_p est bien solution de (E) sur I. ■

Exemple 5. Résolvons $(E) : y'(t) + \dfrac{1}{t} y(t) = e^t + \dfrac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

- L'équation homogène associée est $(H) : y'(t) + \dfrac{1}{t} y(t) = 0$ et on a vu que ses solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ sont

$$\mathcal{S}_H = \{ t \longmapsto y(t) = \frac{\lambda}{t}, \lambda \in \mathbb{R} \}.$$

- On a vu qu'une solution particulière de $(E_1) : y'(t) + \dfrac{1}{t} y(t) = e^t$ sur $\mathbb{R}_+^*$ était la fonction $y_1 : t \longmapsto e^t \dfrac{t-1}{t}$.

• L'équation $(E_2) : y'(t) + \dfrac{1}{t}y(t) = \dfrac{1}{t}$ admet comme solution particulière sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction y_2 constante égale à 1.

D'après le principe de superposition, la fonction $y_p = y_1 + y_2$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ par $y_p(t) : e^t\dfrac{t-1}{t} + 1$ est une solution particulière de (E).

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ est

$$\mathcal{S}_E = \left\{t \longmapsto y(t) = \frac{\lambda}{t} + e^t\frac{t-1}{t} + 1, \lambda \in \mathbb{R}.\right\}$$

9.2 Equations du second ordre

Dans cette section, on s'intéresse aux équations différientielles linéaires d'ordre 2 de la forme

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t),$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a \neq 0$ et f est une fonction continue sur l'intervalle I.

Résoudre une telle équation revient à trouver les fonctions $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables sur I qui vérifient cette équation.

On peut remarquer que si $c = 0$, c'est une équation du premier ordre en y'.

9.2.1 Equation homogène associée

Définition 2: Equation homogène associée

Soit $(E) : ay''(t)+by'(t)+cy(t) = f(t)$, où f est une fonction continue sur I et $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a \neq 0$.
On appelle équation homogène associée à l'équation (E) l'équation

$$(H) : ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0.$$

Afin de résoudre une équation différentielle linéaire homogène de second ordre à cœfficients constants, on aura besoin de quelquess connaissances élémentaires sur la dérivation de fonctions à valeurs complexes.

Si $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ est une application à valeurs complexes, alors pour tout $t \in I$,

$$f(t) = \mathrm{Re}(f(t)) + i\mathrm{Im}(f(t)).$$

On définit alors sur I les fonctions à valeurs réelles

$$\mathrm{Re}(f) : t \longmapsto \mathrm{Re}(f(t)) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f) : t \longmapsto \mathrm{Im}(f(t)).$$

Définition 3: Dérivation d'une fonction à valeurs complexes

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une application.
On dit que f est dérivable sur I si les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont et dans ce cas, on note pour tout $t \in I$,

$$f'(t) = (\mathrm{Re}(f))'(t) + i(\mathrm{Im}(f))'(t).$$

Proposition 2

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On considère la fonction

$$\begin{array}{rccl} f_\alpha : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{\alpha t}. \end{array}$$

La fonction f_α est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f'_\alpha(t) = \alpha e^{\alpha t}.$$

Démonstration. Notons $\alpha = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f_\alpha(t) = e^{(a+ib)t} = e^{at}e^{ibt} = (e^{at}\cos(bt)) + i(e^{at}\sin(bt)),$$

donc pour tout $t \in \mathbb{R}, \mathrm{Re}(f(t)) = e^{at}\cos(bt)$ et $\mathrm{Im}(f(t)) = e^{at}\sin(bt)$.

Les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl} f'(t) & = & (\mathrm{Re}(f))'(t) + i(\mathrm{Im}(f))'(t) \\ & = & (a\cos(bt) - b\sin(bt))e^{at} + i(a\sin(bt) + b\cos(bt))e^{at} \\ & = & (a + ib)(\cos(bt) + i\sin(bt))e^{at} \\ & = & \alpha e^{ibt}e^{at} \\ & = & \alpha e^{(a+ib)t} \\ & = & \alpha e^{\alpha t}. \end{array}$$

■

Remarque 5. Ainsi, si $\alpha \neq 0$, une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t \longmapsto e^{\alpha t}$ est la fonction $t \longmapsto \dfrac{e^{\alpha t}}{\alpha}$.

Théorème 3: Résolution d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à cœfficients constants

On considère une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à cœfficients constants

$$(H) : ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a \neq 0$.
On appelle équation caractéristique associée à cette équation homogène l'équation

$$(EC) : ar^2 + br + c = 0.$$

On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de (EC).

1. Si $\Delta > 0$, on note r_1 et r_2 les deux racines réelles distinctes de (EC). L'ensemble des solutions de (H) sur I est alors
$$\mathcal{S}_H = \{t \longmapsto y(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}.$$
2. Si $\Delta = 0$, on note r la racine double réelle de (EC). L'ensemble des solutions de (H) sur I est alors
$$\mathcal{S}_H = \{t \longmapsto y(t) = (\lambda + \mu t)e^{rt}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$
3. Si $\Delta < 0$, on note $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ les racines complexes conjuguées de (EC). L'ensemble des solutions de (H) sur I est alors
$$\mathcal{S}_H = \{t \longmapsto y(t) = e^{\alpha t}(\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Démonstration.

1. On suppose que $\Delta > 0$. On note r_1 et r_2 les deux racines réelles distinctes de (EC), i.e. $ar_1^2 + br_1 + c = 0$ et $ar_2^2 + br_2 + c = 0$.

   • Montrons que $\{t \longmapsto y(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathcal{S}_H$.

   Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Soit $y : t \longmapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}$. La fonction y est deux fois dérivable sur I et on a pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} ay''(t) + by'(t) + cy(t) &= a(\lambda_1 r_1^2 e^{r_1 t} + \lambda_2 r_2^2 e^{r_2 t}) + b(\lambda_1 r_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 r_2 e^{r_2 t}) + c(\lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}) \\ &= (ar_1^2 + br_1 + c)\lambda_1 e^{r_1 t} + (ar_2^2 + br_2 + c)\lambda_2 e^{r_2 t} \\ &= 0 \end{aligned}$$

   donc $y \in \mathcal{S}_H$, ce qui prouve l'inclusion $\{t \longmapsto y(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathcal{S}_H$.

   • Montrons que $\mathcal{S}_H \subset \{t \longmapsto y(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$.

   Soit $y \in \mathcal{S}_H$.

   Montrons qu'il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $t \in I, y(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}$.

   Posons pour tout $t \in I, z(t) = y(t)e^{-r_1 t}$. La fonction z est deux fois dérivable sur I comme produit de fonctions deux fois dérivables sur I.

   Ainsi, pour tout $t \in I$,

$$y(t) = z(t)e^{r_1 t}, y'(t) = (z'(t) + r_1 z(t))e^{r_1 t}, y''(t) = (z''(t) + 2r_1 z'(t) + r_1^2 z(t))e^{r_1 t}.$$

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rcl} y \in \mathcal{S}_H & \Leftrightarrow & \forall t \in I, ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \forall t \in I, (az''(t) + (2ar_1 + b)z'(t) + (ar_1^2 + br_1 + c)z(t))e^{r_1 t} = 0 \\ & \Leftrightarrow & \forall t \in I, az''(t) + (2ar_1 + b)z'(t) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall t \in I, z'(t) = \lambda e^{-\frac{2ar_1+b}{a}t} \end{array}$$

Or, si on note $r_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, $2ar_1 + b = -\sqrt{\Delta} \neq 0$ donc on obtient

$$y \in \mathcal{S}_H \Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in I, z(t) = -\lambda \frac{a}{2ar_1+b} e^{-\frac{2ar_1+b}{a}t} + \mu.$$

Ainsi, puisque pour tout $t \in I, y(t) = z(t)e^{r_1 t}$, on obtient pour tout $t \in I$,

$$y(t) = \left(-\lambda \frac{a}{2ar_1+b} e^{-\frac{2ar_1+b}{a}t} + \mu\right) e^{r_1 t} = -\lambda \frac{a}{2ar_1+b} e^{-\frac{ar_1+b}{a}t} + \mu e^{r_1 t} = -\lambda \frac{a}{2ar_1+b} e^{(-r_1 - \frac{b}{a})t} + \mu e^{r_1 t}.$$

Or, $r_1 + r_2 = -\dfrac{b}{a}$, donc $r_2 = -r_1 - \dfrac{b}{a}$. Ainsi, pour tout $t \in I$,

$$y(t) = -\lambda \frac{a}{2ar_1+b} e^{r_2 t} + \mu e^{r_1 t}.$$

En posant $\lambda_1 = \mu$ et $\lambda_2 = -\lambda \dfrac{a}{2ar_1+b}$, on trouve que pour tout $t \in I, y(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}$.

On a donc bien montré l'inclusion $\mathcal{S}_H \subset \{t \longmapsto y(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$, d'où finalement l'égalité $\mathcal{S}_H = \{t \longmapsto y(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$.

2. On suppose que $\Delta = 0$. On note r la racine double de (EC), i.e. $ar^2 + br + c = 0$, et $r = -\dfrac{b}{2a}$ d'où $2ar + b = 0$.
   - Montrons que $\{t \longmapsto y(t) = (\lambda + \mu t)e^{rt}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathcal{S}_H$.

   Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Soit $y : t \longmapsto (\lambda + \mu t)e^{rt}$. La fonction y est deux fois dérivable sur I et on a pour tout $t \in I, y'(t) = (\mu + \lambda r + \mu r t)e^{rt}, y''(t) = (2\mu r + \lambda r^2 + \mu r^2 t)e^{rt}$.
   Ainsi, pour tout $t \in I$,

$$\begin{array}{rcl} ay''(t) + by'(t) + cy(t) & = & [\lambda(ar^2 + br + c) + \mu(2ar + ar^2 t + b + brt + ct)]e^{rt} \\ & = & ((ar^2 + br + c)t + 2ar + b)\mu e^{rt} \\ & = & 0 \end{array}$$

   donc $y \in \mathcal{S}_H$, ce qui prouve l'inclusion $\{t \longmapsto y(t) = (\lambda + \mu t)e^{rt}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathcal{S}_H$.
   - Montrons que $\mathcal{S}_H \subset \{t \longmapsto y(t) = (\lambda + \mu t)e^{rt}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

   Soit $y \in \mathcal{S}_H$.
   Montrons qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $t \in I, y(t) = (\lambda + \mu t)e^{rt}$.
   Posons pour tout $t \in I, z(t) = y(t)e^{-rt}$. La fonction z est deux fois dérivable sur I comme produit de fonctions deux fois dérivables sur I.
   Ainsi, pour tout $t \in I$,

$$y(t) = z(t)e^{rt}, y'(t) = (z'(t) + rz(t))e^{rt}, y''(t) = (z''(t) + 2rz'(t) + r^2 z(t))e^{rt}.$$

   Comme précédemment, on obtient l'équivalence

$$\begin{array}{rcl} y \in \mathcal{S}_H & \Leftrightarrow & \forall t \in I, az''(t) + (2ar + b)z'(t) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \forall t \in I, z''(t) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \exists \mu \in \mathbb{R}, \forall t \in I, z'(t) = \mu \\ & \Leftrightarrow & \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in I, z = \lambda + \mu t. \end{array}$$

Ainsi, pour tout $t \in I, y(t) = z(t)e^{rt} = (\lambda + \mu t)e^{rt}$, ce qui prouve l'inclusion

$$\mathcal{S}_H \subset \{t \longmapsto y(t) = (\lambda + \mu t)e^{rt}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Finalement, on a bien l'égalité $\mathcal{S}_H = \{t \longmapsto y(t) = (\lambda + \mu t)e^{rt}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

3. On suppose que $\Delta < 0$ et on note $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ les racines complexes conjuguées de (EC).
En vertu de la proposition précédente et de la preuve faite dans le premier alinéa, on montre de même que $y \in \mathcal{S}_H$ si et seulement si il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$, tels que pour tout $t \in I, y(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t} \in \mathbb{R}$.
Il s'agit donc de trouver les couples $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ tels que pour tout $t \in I$,

$$y(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t} \in \mathbb{R}.$$

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rcl}
\forall t \in I, y(t) \in \mathbb{R} & \Leftrightarrow & \forall t \in I, y(t) = \overline{y(t)} \\
& \Leftrightarrow & \forall t \in I, \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t} = \overline{\lambda_1 e^{r_1 t}} + \overline{\lambda_2 e^{r_2 t}} \\
& \Leftrightarrow & \forall t \in I, (\lambda_1 e^{i\beta t} + \lambda_2 e^{-i\beta t})e^{\alpha t} = (\overline{\lambda_1 e^{i\beta t}} + \overline{\lambda_2 e^{-i\beta t}})e^{\alpha t} \\
& \Leftrightarrow & \forall t \in I, \lambda_1 e^{i\beta t} + \lambda_2 e^{-i\beta t} = \overline{\lambda_1} e^{-i\beta t} + \overline{\lambda_2} e^{i\beta t}. \\
& \Leftrightarrow & \forall t \in I, (\lambda_1 - \overline{\lambda_2})e^{i\beta t} = (\overline{\lambda_1} - \lambda_2)e^{-i\beta t} \\
& \Leftrightarrow & \forall t \in I, (\lambda_1 - \overline{\lambda_2})e^{2i\beta t} = \overline{\lambda_1} - \lambda_2.
\end{array}$$

Puisque le membre de droite est constant, il en est de même du membre de gauche.
Or, $\beta \neq 0$ car r_1 et r_2 ne sont pas réels. Dans ce cas, si I n'est pas un singleton, le membre de gauche est constant si et seulement si $\lambda_1 - \overline{\lambda_2} = 0$ d'où $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$, i.e. $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$.
Ainsi, pour tout $t \in I$,

$$\begin{array}{rcl}
y(t) & = & \lambda_1 e^{r_1 t} + \overline{\lambda_1} e^{r_2 t} \\
& = & e^{\alpha t}(\lambda_1 e^{i\beta t} + \overline{\lambda_1} e^{-i\beta t}) \\
& = & e^{\alpha t}(\lambda_1(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)) + \overline{\lambda_1}(\cos(\beta t) - i\sin(\beta))) \\
& = & e^{\alpha t}(\lambda_1(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)) + \overline{\lambda_1}(\cos(\beta t) - i\sin(\beta t))) \\
& = & e^{\alpha t}((\lambda_1 + \overline{\lambda_1})\cos(\beta t) + i(\lambda_1 - \overline{\lambda_1})\sin(\beta t)) \\
& = & e^{\alpha t}(2\mathrm{Re}(\lambda_1)\cos(\beta t) - 2\mathrm{Im}(\lambda_1)\sin(\beta t)).
\end{array}$$

En posant $\lambda = 2\mathrm{Re}(\lambda_1) \in \mathbb{R}$ et $\mu = -2\mathrm{Im}(\lambda_1) \in \mathbb{R}$, on a bien pour tout $t \in I$,

$$y(t) = e^{\alpha t}(\lambda\cos(\beta t) + \mu\sin(\beta t)).$$

■

Exemple 6. • Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(H) : y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = 0$.

L'équation caractéristique associée est $(EC) : r^2 - 5r + 6 = 0$ et elle admet deux racines réelles distinctes, $r_1 = 2$ et $r_2 = 3$.

L'ensemble des solutions de (H) sur $\mathbb{R}$ est donc

$$\mathcal{S}_H = \{t \longmapsto y(t) = \lambda_1 e^{2t} + \lambda_2 e^{3t}, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}.$$

• Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(H) : y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 0$.

L'équation caractéristique associée est $(EC) : r^2 - 4r + 4 = 0$ et elle admet une racine double, $r = 2$.

L'ensemble des solutions de (H) sur $\mathbb{R}$ est donc

$$\mathcal{S}_H = \{t \longmapsto y(t) = (\lambda + \mu t)e^{2t}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

• Soit $\omega \in \mathbb{R}_+^*$. On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation de l'oscillateur harmonique

$$(H) : y''(t) + \omega^2 y(t) = 0.$$

L'équation caractéristique associée est $(EC) : x^2 + \omega^2 = 0$ et elle admet deux racines complexes conjuguées, $r_1 = i\omega$ et $r_2 = -i\omega$.

L'ensemble des solutions de (H) sur $\mathbb{R}$ est donc

$$\mathcal{S}_H = \{t \longmapsto y(t) = \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

9.2.2 Résolution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à cœfficients constants avec second membre non constant

Théorème 4: Structure des solutions d'une équation différentielle linéaire second ordre à cœfficients constants avec second membre non constant

Soit $(E) : ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t)$, où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a \neq 0$ et f est une fonction continue sur I.
Soit y_p une solution particulière de (E) sur I.
Soit $(H) : ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$ l'équation homogène associée.
Alors y est une solution de (E) si et seulement si $y - y_p$ est une solution de (H) sur I.
Ainsi, il existe $y_H \in \mathcal{S}_H$ tel que $y = y_H + y_p$.

Remarque 6. A l'instar des équations du premier ordre, l'ensemble des solutions de (E) est la somme des solutions générales de (H) et d'une solution particulière de (E).

Démonstration. Soit y une fonction deux fois dérivable sur I.
Puisque y_p est une solution particulière de (E), on a pour tout $t \in I$,

$$ay_p''(t) + by_p'(t) + cy_p(t) = f(t).$$

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} y \in \mathcal{S}_E &\Leftrightarrow \forall t \in I, ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t) \\ &\Leftrightarrow \forall t \in I, ay''(t) + by'(t) + cy(t) = ay_p''(t) + by_p'(t) + cy_p(t) \\ &\Leftrightarrow \forall t \in I, a(y - y_p)''(t) + b(y - y_p)'(t) + c(y - y_p)(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow y - y_p \in \mathcal{S}_H, \end{aligned}$$

ce qui implique qu'il existe $y_H \in \mathcal{S}_H$ tel que $y = y_H + y_p$. ■

Comme pour les équations du premier ordre, la difficulté est donc de trouver une solution particulière. On peut l'intuiter dans certains cas.

1. Si on souhaite résoudre une équation de la forme

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = P(t)e^{\alpha t},$$

où P est un polynôme de degré n et α un réel, on cherchera une solution particulière sous la forme $y(t) = t^m Q(t)e^{\alpha t}$ où Q est un polynôme de degré n et m est la multiplicité de α en tant que racine de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ (m peut donc valoir $0, 1$ ou 2).

2. Si on souhaite résoudre une équation de la forme

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = A\cos(\omega t) \quad \text{ou} \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = A\sin(\omega t),$$

on cherchera une solution particulière sous la forme

$$y(t) = \lambda\cos(\omega t) + \mu\sin(\omega t)$$

si $i\omega$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, et sous la forme

$$y(t) = t(\lambda\cos(\omega t) + \mu\sin(\omega t))$$

si $i\omega$ est racine de l'équation caractéristique.

Exemple 7. 1. Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E) : y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = te^{-2t}.$$

Commençons par résoudre l'équation homogène associée

$$(H) : y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 0.$$

L'équation caractéristique $r^2 + 5r + 6 = 0$ admet deux racines distinctes, -2 et -3 donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène sur $\mathbb{R}$ est

$$\mathcal{S}_H = \{t \longmapsto y(t) = \lambda_1 e^{-2t} + \lambda_2 e^{-3t}, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Le second membre est de la forme $P(t)e^{\alpha t}$ avec P un polynôme de degré 1 et $\alpha = -2$ qui est une racine simple de l'équation caractéristique.
On cherche donc une solution particulière sous la forme

$$y(t) = t(at + b)e^{-2t} = (at^2 + bt)e^{-2t}.$$

On a alors pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$y'(t) = (-2at^2 - 2bt + 2at + b)e^{-2t} = (-2at^2 + 2(a - b)t + b)e^{-2t}$$

et

$$y''(t) = (4at^2 - 4(a - b)t - 2b - 4at + 2(a - b))e^{-2t} = (4at^2 + (4b - 8a)t + 2a - 4b)e^{-2t}.$$

Ainsi, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = te^{-2t} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R}, 2at + 2a + b = t \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 2a & = & 1 \\ 2a + b & = & 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

d'où $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = -1$.
La fonction $t \longmapsto y(t) = (\frac{1}{2}t^2 - t)e^{-2t}$ est donc une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$.
L'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est donc

$$\mathcal{S}_E = \{t \longmapsto y(t) = \lambda_1 e^{-2t} + \lambda_2 e^{-3t} + (\frac{1}{2}t^2 - t)e^{-2t}, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}.$$

2.
Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = \cos(2t).$$

Résolvons d'abord l'équation homogène (H) : $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0$. L'équation caractéristique $r^2 + 2r + 1 = 0$ admet une racine double qui est -1 donc les solutions de (H) sont

$$\left\{t \longmapsto y(t) = (\lambda + \mu t)e^{-t}\right\}.$$

Le second membre est de la forme $\cos(\omega t)$ avec $i\omega$ qui n'est pas une racine de l'équation caractéristique. On cherche donc une solution particulière de (E) sous la forme

$$y(t) = a\cos(2t) + b\sin(2t).$$

On a alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ $y'(t) = -2a\sin(2t) + 2b\cos(2t)$ et $y''(t) = -4a\cos(2t) - 4b\sin(2t)$.
Ainsi,

$$\forall t \in \mathbb{R}, y''(t) + 2y'(t) + y(t) = \cos(2t) \quad \Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R}, (-3a + 4b)\cos(2t) + (-3b - 4a)\sin(2t) = \cos(2t).$$

Pour $t = 0$, on obtient $-3a + 4b = 1$ et pour $t = \frac{\pi}{4}$, on obtient $3b + 4a = 0$.
Ainsi, $a = -\dfrac{3}{4}b$ et en injectant dans la première équation, on trouve $b = \dfrac{4}{25}$ d'où $a = \dfrac{-3}{25}$.
La fonction $t \longmapsto y(t) = -\dfrac{3}{25}\cos(2t) + \dfrac{4}{25}\sin(2t)$ est donc une solution particulière de (E).
L'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est alors

$$\left\{t \longmapsto y(t) = (\lambda + \mu t)e^{-t} - \frac{3}{25}\cos(2t) + \frac{4}{25}\sin(2t), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

9.2.3 Principe de superposition

De la même manière que pour les équations du premier ordre, on a le principe de superposition :

Proposition 3: Principe de superposition

Soit $(E) : ay''(t) + by'(t) + cy(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k(t)$, où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a \neq 0$ et les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ sont continues sur I.
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note y_k une solution particulière sur I de l'équation

$$(E_k) : ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f_k(t).$$

Alors la fonction $y_p = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k$ est une solution particulière de (E) sur I.

Démonstration. Par hypothèse, on a pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et pour tout $t \in I$,

$$ay_k''(t) + by_k'(t) + cy_k(t) = f_k(t).$$

La fonction y_p est dérivable sur I comme somme de fonctions dérivables sur I et on a pour tout $t \in I$,

$$ay_p''(t) + by_p'(t) + cy_p(t) = \sum_{k=1}^{n}(ay_k''(t) + by_k'(t) + cy_k(t)) = \sum_{k=1}^{n} f_k(t),$$

donc y_p est bien solution de (E) sur I. ∎

Exemple 8. Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E) : y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = te^{-2t} + 1.$$

On a vu que les solutions de l'équation homogène associée sont

$$\mathcal{S}_H = \{t \longmapsto y(t) = \lambda_1 e^{-2t} + \lambda_2 e^{-3t}, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}.$$

On a déterminé une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de $(E_1) : y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = te^{-2t}$ qui est $y_1 : t \longmapsto (\frac{1}{2}t^2 - t)e^{-2t}$.

De plus, une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de $(E_2) : y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 1$ est la fonction constante $y_2 : t \longmapsto \dfrac{1}{6}$.

Ainsi, la fonction $y_p : t \longmapsto (\frac{1}{2}t^2 - t)e^{-2t} + \dfrac{1}{6}$ est une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$.

Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont donc

$$\mathcal{S}_E = \left\{t \longmapsto y(t) = \lambda_1 e^{-2t} + \lambda_2 e^{-3t} + \left(\frac{1}{2}t^2 - t\right) e^{-2t} + \frac{1}{6}, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$