Liste d'exercices n°9 — Equations différentielles linéaires simples

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes d'inconnue y.
Pour chacune d'elles, donner ensuite toutes les solutions y qui vérifient $y(0) = 1$.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) = y(x)$.
2. $\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) + 5y(t) = 2$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, 2y'(x) - 6y(x) = 14$.

Exercice 2. Résoudre les équations différentielles suivantes, d'inconnue y.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - 2y(x) = (x-1)e^{2x}$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - y(x) = \cos(2x)e^{x}$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + xy(x) = x^2 + 1$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}, (1+x^2)y'(x) - 2xy(x) = x$.
5. $\forall x \in \mathbb{R}, 3y'(x) + 2y(x) = x + e^{2x}$.
6. $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + y(x) = \dfrac{1}{1+e^{x}}$.
7. $\forall x \in \mathbb{R}, 3xy'(x) - 4y(x) = x$.
8. $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + \sin(x)y(x) = 2\sin(x)$.
9. $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + e^{x}y(x) = 0$.
10. $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - y(x) = x^2(e^{x} + e^{-x})$.
11. $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + 2y(x) = x^2 - 2x + 3$.
12. $\forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[, y'(x) + \tan(x)y(x) = \sin(2x) + \cos(x)$.

Exercice 3. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(x) = f(0) + f(1).$$

Exercice 4. On considère l'équation différentielle

$$(E) : |x|y'(x) + (x-2)y(x) = x^3.$$

1. Résoudre (E) sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
2. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5. Résoudre les équations différentielles suivantes, d'inconnue y.

1. $\forall t \in \mathbb{R}, y''(t) + 8y'(t) + 15y(t) = 0$.
2. $\forall t \in \mathbb{R}, y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) = 3$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, y''(x) = 2y'(x)$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}, y''(x) - 4y(x) = e^{x}\cos(x)$.
   On cherchera une solution particulière de la forme $x \longmapsto e^{x}\left(a\cos(x) + b\sin(x)\right)$, avec a et b deux réels.
5. $\forall x \in \mathbb{R}, y''(x) - 4y'(x) = 8x - 16$.
   On cherchera une solution particulière de la forme $x \longmapsto ax^2 + bx$, avec a et b deux réels.
6. $\forall x \in \mathbb{R}, y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = 3xe^{x}$.
   On cherchera une solution particulière de la forme $x \longmapsto (ax+b)e^{x}$, avec a et b réels.
7. $\forall x \in \mathbb{R}, (1+x^2)y''(x) + 2xy'(x) - 2 = 0$.

Exercice 6. Déterminer toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(2-x).$$

Exercice 7. Trouver les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout réel x, on ait :

$$3\int_0^x f(t)dt = 2xf(x).$$

Exercice 8.

1. Résoudre l'équation différentielle suivante d'inconnue z :

$$z'' - z = 0.$$

2. Résoudre alors l'équation différentielle (d'ordre 4) suivante d'inconnue y :

$$y^{(4)} - 2y'' + y = 0.$$

Exercice 9. Appelons (E) l'équation différentielle suivante (à cœfficients non constants !), d'inconnue y :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (1+e^x)^2 y''(x) - 2e^x(1+e^x)y'(x) - (3e^x+1)y(x) = 0.$$

Dans cet exercice, on se propose de résoudre l'équation différentielle (E) par changement d'inconnue.

1. Soit $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Considérons la fonction $g\colon x \longmapsto \dfrac{f(x)}{1+e^x}$.
   Montrer que la fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction g est solution de l'équation différentielle (H) suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, y''(x) - y(x) = 0$$

2. Résoudre l'équation différentielle (H).
3. En déduire les solutions de l'équation (E).