Corrigé de la liste d'exercices n°8 — Fonctions réelles usuelles

Exercice 1

La fonction f est définie pour les réels x tels que $\dfrac{1+x}{1-x} > 0 \Leftrightarrow (1+x)(1-x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-1, 1[$ donc $\mathcal{D}_f =]-1, 1[$ qui est symétrique par rapport à l'origine.
Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $-x \in]-1, 1[$ et

$$\begin{array}{rcl} f(-x) & = & (1-(-x)^2)\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) \\ & = & (1-x^2)(\ln(1-x) - \ln(1+x)) \\ & = & -(1-x^2)(\ln(1+x) - \ln(1-x)) \\ & = & -(1-x^2)\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) \\ & = & -f(x) \end{array}$$

donc f est impaire.

Exercice 2

1. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x)$.
   Posons pour tout $x \in \mathbb{R}, g(x) = f(-x)$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}, g'(x) = -f'(-x)$.
   Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)$, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = g'(x) = -f'(-x)$ d'où pour tout réel $x, f'(-x) = -f'(x)$, ce qui prouve que f' est impaire.
2. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}, -f(x) = f(-x)$.
   Posons pour tout $x \in \mathbb{R}, g(x) = f(-x)$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}, g'(x) = -f'(-x)$.
   Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}, -f(x) = g(x)$, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}, -f'(x) = g'(x) = -f'(-x)$ d'où pour tout réel $x, f'(-x) = f'(x)$, ce qui prouve que f' est paire.
3. On suppose qu'il existe $T > 0$ tel que pour tout réel $x, f(x+T) = f(x)$, i.e. f est T-périodique. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x+T)$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}, g'(x) = f'(x+T)$.
   Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)$, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = g'(x) = f'(x+T)$, ce qui prouve que f' est T-périodique.

Exercice 3

1. Pour tout réel $x, f(x) = -x^2 + \pi \leqslant \pi = f(0)$ donc $\max\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \pi$. En revanche, f n'est pas minorée car $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.
2. Pour tout réel $x, 1 \leqslant 2 - \sin(x) \leqslant 3$ donc $f(-\frac{\pi}{2}) = \dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{2-\sin(x)} \leqslant 1 = f(\frac{\pi}{2})$ donc $\min\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \dfrac{1}{3}$ et $\max\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 1$.

3. Pour tout réel $x, x^2+x+1 = (x+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 1 = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ donc pour tout réel $x, x^2+x+1 \geqslant \frac{3}{4} > 0$ avec égalité pour $x = -\frac{1}{2}$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}, 0 < \dfrac{1}{x^2+x+1} \leqslant \dfrac{4}{3}$ avec égalité si $x = \frac{1}{2}$ donc $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} \dfrac{1}{x^2+x+1} = \dfrac{4}{3}$.
On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2+x+1} = 0$ donc $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} \dfrac{1}{x^2+x+1} = 0$ (mais ce n'est pas un minimum, car la borne inférieure n'est pas atteinte).
4. Par définition de la partie entière, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*, \dfrac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor \leqslant \dfrac{1}{x}$ donc en multipliant par $x > 0$, on obtient

$$1 - x < x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant 1.$$

Par ailleurs, on a pour tout $x > 0, 0 \leqslant x \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor \leqslant 1$.
On a $f(1) = 1$ et $f(2) = 0$ donc $\min\limits_{x>0} f(x) = 0$ et $\max\limits_{x>0} f(x) = 1$.

Exercice 4

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3\cos(x) - 3x\sin(x) - \ln(5)5^x$.
2. f est dérivable sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1 + k\frac{\pi}{2}\}$ et on a pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

$$f'(x) = e^x + \frac{(\tan(x+1))^7 - 7x(1+\tan^2(x+1))(\tan(x+1))^6}{(\tan(x+1))^{14}}.$$

3. f est dérivable sur $\mathcal{D}_f =]0, \frac{\pi}{2}[\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}] - \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi[\bigcup_{k\in\mathbb{Z}_-}] - \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, -\frac{\pi}{2} + 2k\pi[$ et on a pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,
$f'(x) = \dfrac{7x^6\cos(x) - x^7\sin(x)}{2\sqrt{x^7\cos(x)}}$.
4. On a $3x^2 - 5 > 0 \Leftrightarrow x^2 > \dfrac{5}{3} \Leftrightarrow x > \sqrt{\dfrac{5}{3}}$ ou $x < -\sqrt{\dfrac{5}{3}}$ donc f est dérivable sur $\mathcal{D}_f = \left]-\infty, -\sqrt{\dfrac{5}{3}}\right[\cup \left]\sqrt{\dfrac{5}{3}}, +\infty\right[$ et pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{3x^2-5}} \times \frac{6x}{2\sqrt{3x^2-5}} = \frac{6x}{2(3x^2-5)}.$$

5. On a $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \in]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[\\ 4 - x^2 & \text{si } x \in [-2, 2] \end{cases}$. Puisque la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0, f est dérivable sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ et pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[\\ -2x & \text{si } x \in]-2, 2[. \end{cases}$$

6. La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi, (2k+1)\pi[$ et pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a

$$f'(x) = e^x \ln(\sin(x)) + e^x \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

7. On a $\ln(\ln(x)) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > 1 \Leftrightarrow x > e$ donc f est dérivable sur $]e, +\infty[$ et pour tout $x > e$, on a
$$f'(x) = \frac{1}{\ln(\ln(x))} \times \frac{1}{x\ln(x)}.$$

8. f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. On a pour tout $x \in]-1, 1[$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ et pour tout $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ donc
$$\forall x \in]-1,1[, f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \text{ et } \forall x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[, f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

9. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
Pour tout $x \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi, (2k+1)\pi[$, $f(x) = \sin(x)$ donc $f'(x) = \cos(x)$.
Pour tout $x \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}](2k+1)\pi, (2k+2)\pi[$, $f(x) = -\sin(x)$ donc $f'(x) = -\cos(x)$.

10. On a $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = 3$ donc f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$,
$$f'(x) = \frac{2x-5}{x^2-5x+6}.$$

Exercice 5

1. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & x^x = e^{x\ln(x)}. \end{array}$ On peut en fait prolonger f sur $\mathbb{R}_+$ par continuité car $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = 1$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout $x > 0$:
$$f'(x) = \left(\ln(x) + x \times \frac{1}{x}\right) e^{x\ln(x)} = (\ln(x)+1)x^x.$$
On a $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > -1 \Leftrightarrow x > e^{-1} = \dfrac{1}{e}$.
La fonction f est donc strictement croissante sur $[e^{-1}, +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0, e^{-1}]$ et atteint son minimum en e^{-1} qui vaut $f(e^{-1}) = (e^{-1})^{e^{-1}} = e^{-e^{-1}} < 1$ car $-e^{-1} < 0$.
Notons que $f(1) = 1$.
Enfin, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. Soit $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + \sin^2(x). \end{array}$ Pour tout $x \in \mathbb{R}, 0 \leqslant \sin^2(x) \leqslant 1$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}, x \leqslant x + \sin^2(x) \leqslant x + 1$.
Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, on en déduit par comparaison que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
De même, puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} x + 1 = -\infty$, on en déduit par comparaison que $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.
La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$g'(x) = 1 + 2\sin(x)\cos(x) = 1 + \sin(2x) \geqslant 0$, donc la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$.

3. Pour que $h(x)$ soit défini, il faut que $x + 1 \neq 0$ i.e. $x \neq -1$ et $\dfrac{x-1}{x+1} \geqslant 0$, i.e. $x \in]-\infty, -1[\cup[1, +\infty[$.
Finalement, h est définie sur $\mathcal{D}_h =]-\infty, -1[\cup[1, +\infty[$.

Pour tout $x \in \mathcal{D}_h$, on a $h(x) = x\sqrt{u(x)}$ où $u(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ donc h est dérivable en les points x pour lesquels $u(x) > 0$, i.e. pour tout $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$,

$$h'(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + x \times \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \frac{x}{(x+1)^2} \times \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

On remarque que pour tout $x > 1, h'(x) > 0$ donc h est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.
Soit $x < -1$. On a

$$\begin{aligned} h'(x) &= \sqrt{\frac{1-x}{-x-1}} + \frac{x}{(x+1)^2} \times \sqrt{\frac{-x-1}{1-x}} \\ &= \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{-x-1}} + \frac{x\sqrt{-x-1}}{(x+1)^2\sqrt{1-x}} \\ &= \frac{(1-x)(x+1)^2 + x(-x-1)}{(x+1)^2\sqrt{(-x-1)(1-x)}} \\ &= \frac{(x+1)((1-x)(x+1)-x)}{(x+1)^2\sqrt{(-x-1)(1-x)}} \\ &= \frac{(x+1)(-x^2-x+1)}{(x+1)^2\sqrt{(-x-1)(1-x)}} \end{aligned}$$

On a pour tout $x < -1, (x+1) < 0$, $-x^2 - x + 1 > 0$ si $x > \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $-x^2 - x - 1 < 0$ si $x < \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Ainsi, h est strictement croissante sur $\left]-\infty, \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, -1\right[$.

Notons que $h(1) = 0$.
On a $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$ donc

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = -\infty$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = +\infty.$$

On a $\displaystyle\lim_{x\to-1^-} x-1 = -2$ et $\displaystyle\lim_{x\to-1^-} x+1 = 0^-$ donc par quotient $\displaystyle\lim_{x\to-1^-} \frac{x-1}{x+1} = +\infty$.
Par produit, on en déduit

$$\lim_{x\to-1^-} h(x) = \lim_{x\to-1^-} x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = -\infty.$$

Exercice 6

1. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et on a pour tout $x \neq -1$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \exp\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + x\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}\exp\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \\ &= \exp\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\left(\frac{(x+1)^2+2x}{(x+1)^2}\right) \\ &= \exp\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\left(\frac{x^2+4x+1}{(x+1)^2}\right) \\ &= \exp\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\left(\frac{(x+2+\sqrt{3})(x+2-\sqrt{3})}{(x+1)^2}\right). \end{aligned}$$

   En effet, les racines de x^2+4x+1 sont $-2-\sqrt{3} < -1$ et $-2+\sqrt{3} > -1$.
   On a donc $f'(x) > 0$ si $x < -2-\sqrt{3}$ et si $x > -2+\sqrt{3}$ et $f'(x) < 0$ si $-2-\sqrt{3} < x < -1$ et si $-1 < x < -2+\sqrt{3}$.
   La fonction f est donc strictement croissante sur $]-\infty, -2-\sqrt{3}]$, strictement décroissante sur $[-2-\sqrt{3}, -1[$, strictement décroissante sur $]-1, -2+\sqrt{3}]$ et strictement croissante sur $[-2+\sqrt{3}+\infty[$.
   On a $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$ donc par composition

$$\lim_{x\to-\infty} \exp\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty} \exp\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = e > 0$$

   donc par produit $\lim\limits_{x\to-\infty} x\exp\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x\exp\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = +\infty$.
   D'autre part, $\lim\limits_{x\to-1^-} \frac{x-1}{x+1} = +\infty$ donc par composition et produit

$$\lim_{x\to-1^-} x\exp\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\infty.$$

   De même, $\lim\limits_{x\to-1^+} \frac{x-1}{x+1} = -\infty$ donc par composition et produit

$$\lim_{x\to-1^-} x\exp\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0^-.$$

2. La fonction g est définie pour tout t tel que $1+t > 0$. Elle est donc définie sur $]-1, +\infty[$ et y est dérivable comme composée de fonctions dérivables. Pour tout $t > -1$, on a

$$g'(t) = \frac{2(1+t)-2t}{(1+t)^2} - \frac{1}{1+t} = \frac{2-(1+t)}{(1+t)^2} = \frac{1-t}{(1+t)^2}.$$

   Ainsi, si $t < 1, g'(t) > 0$ et si $t > 1, g'(t) < 0$ donc g est strictement croissante sur $]-1, 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.
   On a $\lim\limits_{t\to-1^+} \frac{2t}{1+t} = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to-1^+} \ln(1+t) = -\infty$ donc on a une forme indéterminée de la forme $-\infty+\infty$. Pour la lever, on factorise par $\frac{1}{1+t}$:

$$g(t) = \frac{1}{1+t}(2t-(1+t)\ln(1+t)).$$

Posons $x = 1 + t$. On a

$$\lim_{t \to -1^+} (1+t)\ln(1+t) = \lim_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0$$

donc $\lim_{t \to -1^+} 2t - (1+t)\ln(1+t) = -2$ donc par produit

$$\lim_{t \to -1^+} g(t) = \lim_{t \to -1^+} \frac{1}{1+t}(2t - (1+t)\ln(1+t)) = -\infty.$$

Notons que $g(1) = 1 - \ln(2) > 0$.
Enfin, on a $\lim_{t \to +\infty} \frac{2t}{1+t} = 2$ et $\lim_{t \to +\infty} \ln(1+t) = +\infty$ donc

$$\lim_{t \to +\infty} g(t) = \frac{2t}{1+t} - \ln(1+t) = -\infty.$$

Exercice 7

1. Posons pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = e^x - (x+1) = e^x - x - 1$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = e^x - 1.$$
On a $f'(x) > 0$ si et seulement si $x > 0$ et $f'(x) < 0$ si et seulement si $x < 0$. Ainsi, f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$. La fonction f admet donc un minimum en 0, ce qui assure que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) \geqslant f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0,$$
i.e. pour tout $x \in \mathbb{R}, e^x \geqslant x + 1$.
2. Posons pour tout $x > 0, g(x) = \ln(x) - (x-1) = \ln(x) - x + 1$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$,
$$g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}.$$
On a $g'(x) > 0$ si et seulement si $x < 1$ et $g'(x) < 0$ si et seulement si $x > 1$. Ainsi, la fonction g est strictement croissante sur $]0, 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. La fonction g admet donc un maximum en 1, ce qui assure que pour tout $x > 0$,
$$g(x) \leqslant g(1) = \ln(1) - 1 + 1 =, 0$$
i.e. pour tout $x > 0, \ln(x) \leqslant x - 1$.

Exercice 8

On a montré dans le TD2 que pour tout $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on a $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$.
Par croissance de la fonction logarithme néperien sur $\mathbb{R}_+^*$, ceci implique que pour tout $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$,

$$\ln(\sqrt{ab}) \leqslant \ln\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

i.e. pour tout $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$,

$$\frac{1}{2}(\ln(a) + \ln(b)) \leqslant \ln\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Exercice 9

Posons pour tout $x \geqslant 1, f(x) = (x-2)\sqrt{x-1}$. La fonction f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et on a pour tout $x > 1$,

$$f'(x) = \sqrt{x-1} + \frac{x-2}{2\sqrt{x-1}} = \frac{2(x-1)+x-2}{2\sqrt{x-1}} = \frac{3x-4}{2\sqrt{x-1}}.$$

On a $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 3x-4 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{4}{3}$ et $f'(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \dfrac{4}{3}$ donc f est décroissante sur $[1, \frac{4}{3}]$ et est croissante sur $[\frac{4}{3}, +\infty[$.
Ainsi, f admet un minimum en $\frac{4}{3}$ qui vaut $f(\frac{4}{3}) = (\frac{4}{3}-2)\sqrt{\frac{4}{3}-1} = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = -\frac{2}{3} \times \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} = -\frac{2}{3^{\frac{3}{2}}}$.
On en déduit que pour tout $x \geqslant 1, (x-2)\sqrt{x-1} \geqslant -\dfrac{2}{3^{\frac{3}{2}}}$.

Exercice 10

1. Soit $x > 0$. On a les équivalences suivantes :

   $$x^{x^3} = (x^x)^3 \Leftrightarrow x^{x^3} = x^{3x} \Leftrightarrow e^{x^3 \ln(x)} = e^{3x \ln(x)}.$$

   Par injectivité de la fonction exponentielle, ceci équivaut à

   $$x^3 \ln(x) = 3x \ln(x) \Leftrightarrow x \ln(x)(x^2-3) = 0 \Leftrightarrow x \ln(x) = 0 \,\text{ou}\, x^2 - 3 = 0.$$

   Si $x \ln(x) = 0$, puisque $x > 0$, ceci implique que $\ln(x) = 0$ d'où $x = 1$.
   Si $x^2 - 3 = 0$, i.e. $x^2 = 3$ et puisque $x > 0$, ceci implique que $x = \sqrt{3}$.
   Ainsi, les deux solutions de cette équation sont $\{1, \sqrt{3}\}$.
2. Tout d'abord, notons que l'inéquation est bien définie si $x + 3 > 0$, i.e. $x > -3$ et $x - 1 > 0$, i.e. $x > 1$. Donc l'inéquation est bien définie pour tout $x > 1$.
   Soit $x > 1$. On a les équivalences suivantes :

   $$\ln(x+3) - \ln(x-1) \geqslant 1 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+3}{x-1}\right) \geqslant 1 = \ln(e)$$

   donc par croissance de la fonction logarithme néperien, ceci équivaut à

   $$\frac{x+3}{x-1} \geqslant e \Leftrightarrow x + 3 \geqslant e(x-1) \,\text{car}\, x - 1 > 0,$$

   ce qui équivaut à $x(e-1) \leqslant 3+e$ d'où en divisant par $e-1 > 0$, on obtient $x \leqslant \dfrac{3+e}{e-1} > 1$.
   Finalement, l'ensemble des solutions de cette inéquation est $\left]1, \dfrac{3+e}{e-1}\right]$.

Exercice 11

1. On a $f(x) = (1+2x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+2x)}$ donc $f(x)$ est bien défini si $x \neq 0$ et si $1 + 2x > 0$, i.e. $x > -\dfrac{1}{2}$.
   L'ensemble de définition de f est donc $\mathcal{D}_f =]-\frac{1}{2}, 0[\cup]0, +\infty[$.

2. La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathcal{D}_f$ et on a pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(-\frac{1}{x^2}\ln(1+2x) + \frac{1}{x} \times \frac{2}{1+2x}\right) e^{\frac{1}{x}\ln(1+2x)} \\ &= \frac{2x-(1+2x)\ln(1+2x)}{x^2(1+2x)}(1+2x)^{\frac{1}{x}}. \end{aligned}$$

3. Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f'(x)$ est du signe de $2x-(1+2x)\ln(1+2x)$.
Posons pour tout $x > -\dfrac{1}{2}$, $g(x) = 2x-(1+2x)\ln(1+2x)$. La fonction g est dérivable sur $\left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ et pour tout $x > -\dfrac{1}{2}$, on a

$$g'(x) = 2 - 2\ln(1+2x) - (1+2x) \times \frac{2}{1+2x} = -2\ln(1+2x).$$

Ainsi $g'(x) > 0$ si et seulement si $x \in \left]-\dfrac{1}{2}, 0\right[$ et $g'(x) < 0$ si et seulement si $x > 0$.

On en déduit que la fonction g est strictement croissante sur $\left]-\dfrac{1}{2}, 0\right]$ et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. Il en découle que la fonction g admet un maximum en 0 donc pour tout $x > -\dfrac{1}{2}$, $g(x) \leqslant g(0) = 0$.
Ceci assure que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f'(x) < 0$ donc la fonction f est strictement décroissante sur $\left]-\dfrac{1}{2}, 0\right]$ et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.
On a $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}^+} \dfrac{1}{x}\ln(1+2x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty$.
On sait que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{2x} = 1$.
Ainsi,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+2x)}{x} = \lim_{x \to 0} 2\frac{\ln(1+2x)}{2x} = 2.$$

On en déduit que $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = e^2$.
Enfin, par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1+2x)}{x} = 0$ donc

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}\ln(1+2x)} = 1.$$

Exercice 12

On a pour tout $x \in]0, 1[$, $x^x(1-x)^{1-x} = e^{x\ln(x)}e^{(1-x)\ln(1-x)} = e^{x\ln(x)+(1-x)\ln(1-x)}$.
Posons pour tout $x \in]0, 1[$, $f(x) = x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x)$. La fonction f est dérivable sur $]-1, 1[$ comme composée de fonctions dérivables et on a pour tout $x \in]0, 1[$,

$$f'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - \ln(1-x) - (1-x) \times \frac{1}{1-x} = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right).$$

On a $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{1-x} \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant 1-x \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{1}{2}$ et $f'(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \dfrac{1}{2}$ donc f est décroissante sur $]0, \frac{1}{2}[$ et croissante sur $]\frac{1}{2}, 1[$. Ainsi, f admet un minimum en $\dfrac{1}{2}$ et pour tout

$x \in]0,1[$, on en déduit

$$x\ln(x)+(1-x)\ln(1-x) \geqslant f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2).$$

En composant par la fonction exponentielle qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on obtient pour tout $x \in]0,1[$,

$$x^x(1-x)^{1-x} = e^{x\ln(x)+(1-x)\ln(1-x)} \geqslant e^{-\ln(2)} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 13

On a $a^b = e^{b\ln(a)} = e^{\frac{1}{x}\ln(x^{\frac{1}{x}})\times x^2} = e^{x\ln(x^{\frac{1}{x}})} = e^{\ln(x^{\frac{1}{x}}\times x)} = e^{\ln(x)} = x$.

Exercice 14

1. $$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2.$$

2. Il y a deux cas :
   • Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel, on pose $a=b=\sqrt{2}$ et dans ce cas, on a bien a et b irrationnels et $a^b = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel.
   • Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est irrationnel, on pose $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $b=\sqrt{2}$ et dans ce cas, on a bien a et b irrationnels et $a^b = 2$ est rationnel.
   Dans tous les cas, on peut trouver deux nombres a et b irrationnels tels que a^b est rationnel.