Liste d'exercices n°10 — Suites réelles

Exercice 1. Etudier la monotonie des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{4^n (n!)^2}{(2n)!}$;
2. $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

Exercice 2. Calculer les limites éventuelles des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{\lfloor 1 - \frac{n}{3} \rfloor}{n}$;
2. $u_n = (-2 + (-1)^n)n$;
3. $u_n = (1 + (-1)^n)n$;
4. $u_n = \dfrac{n^3 - 2n^4 + n^3 \sin(n)}{n^2}$;
5. $u_n = -(2n-1)^6 - (1-3n)^7$;
6. $u_n = \dfrac{n^3(n^2+1)}{n^2(\sin(n) - n^3)}$;
7. $u_n = \dfrac{\frac{1}{n^2} - \frac{2}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^3}}$.

Exercice 3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose

1. $u_n = \sqrt{n(n+1)} - n$;
2. $v_n = \dfrac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}$;
3. $w_n = \left(\dfrac{2^n + 3^n}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$;
4. $x_n = \dfrac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k}$;
5. $y_n = \ln(n+1) - \ln(n)$.

Etudier la convergence des suites définies par ces expressions.

Exercice 4. Etudier la convergence des suites définies pour tout entier naturel n par :

1. $u_n = \cos(n) - n$;
2. $u_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n \sin(n)$;
3. $u_n = \dfrac{n + \sin(n)}{n^2 + 1}$;
4. $u_n = \dfrac{(-1)^n \ln(n) + \sin(n)}{n}$;
5. $u_n = n + (-1)^n \ln(n)$;
6. $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\sin(n!)\right)^n$.

Exercice 5. Etudier la convergence des suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

1. $u_n = \sqrt{n^2+3} - \sqrt{n^2+1}$;
2. $v_n = n \cos\left(\dfrac{1}{n}\right)$;
3. $w_n = \dfrac{\cos(n)}{n}$;
4. $x_n = \exp\left(1 - \dfrac{(-1)^n}{n}\right)$.

Exercice 6. Donner la nature des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2}.$$

Exercice 7. Soit x un réel. Donner la nature des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{\lfloor n^2 x \rfloor}{n} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lfloor kx \rfloor}{n^2}.$$

Exercice 8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et k un réel de $]0;1[$ tels que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1}| \leqslant k|u_n|$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice 9. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $[0,1]$ telles que la suite $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 1.

Exercice 10. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{u_n}$.

1. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geq \sqrt{2}$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$.

Exercice 11. Soient r et q deux réels. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q.
Expliciter les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans chacun des cas suivants.

1. On suppose que $u_3 = 6$ et $u_7 = 9$.
2. On suppose que $v_3 = 6$ et $v_{14} = 16$.
3. On suppose que $u_0 = 1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{100} u_k = 2$.

Exercice 12. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{-1}{u_n + 2}.$$

1. Montrer que l'équation $x = \dfrac{-1}{x+2}$, d'inconnue x réelle, possède exactement une solution, que l'on notera c.
2. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq c$.
3. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par : pour tout entier naturel n,
$$v_n = \frac{1}{u_n - c}.$$
Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.
4. Expliciter la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Exercice 13. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - 1$.
Donner l'expression de u_n pour tout entier naturel n. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Exercice 14. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 1. \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Exercice 15. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n.$$

Exprimer u_n pour tout entier naturel n en fonction de u_0 et u_1. Que remarque-t-on ?

Exercice 16. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n dans chacun des cas suivants :

1. $u_0 = -1, u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
2. $u_0 = 4, u_1 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} + 4u_n$.
3. $u_0 = 1, u_1 = \sqrt{3} - \dfrac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n$.

Exercice 17. Expliciter les suites définies par :

1. $u_0 = e^3$, $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}$.
2. $v_0 = e^2$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \sqrt{v_n}$.
3. $w_0 = 11$, $w_1 = 25$ et, pour tout entier naturel n, $2w_{n+2} - 3w_{n+1} - 2w_n = 4$.
4. $x_0 = e^{11}$, $x_1 = e^{25}$ et, pour tout entier naturel n, $x_{n+2}^2 = x_{n+1}^3 x_n^2$.

Exercice 18. Soient les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 1, v_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \dfrac{1}{3}(2u_n + v_n) \\ v_{n+1} &= \dfrac{1}{3}(u_n + 2v_n). \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$.
2. Prouver que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
3. En considérant la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, déterminer les limites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 19. On définit la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, L_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}.$$

1. Démontrer que les suites $(L_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(L_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
2. En déduire la nature de la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 20. Soient a et b deux réels strictement positifs.
On définit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = a, v_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ et $v_n > 0$.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1, u_n \leq v_n$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante et que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.
4. Déduire des questions précédentes que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et de même limite.
5. En conclure que les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.

Exercice 21. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{2}{u_{n+1}} = \dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{v_n} \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}. \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
2. Montrer que $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. Démontrer que ces deux suites convergent vers la même limite.
5. Etudier la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis déterminer la valeur de la limite commune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 22. Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 2}.$$

Exercice 23. Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 35}$.

Exercice 24. Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation $u_{n+1} = \sqrt{12 - u_n}$.

Exercice 25. Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \neq -\dfrac{1}{2}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1 + u_n}{1 + 2u_n}.$$

Exercice 26. Soit $a > 0$ fixé. Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \neq 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

Exercice 27. A l'aide d'un équivalent, déterminer la limite des suites suivantes :

1. $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$;
2. $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)(\sqrt{n^2 - 1} - n)$;
3. $u_n = \dfrac{\sqrt{\cos(\frac{1}{n}) - 1}}{\tan(\frac{(-1)^n}{n^2})}$;
4. $u_n = n^2\sqrt{n} - n^3\sqrt[3]{n} + \dfrac{1}{n^2}$.

Exercice 28.
Donner un équivalent, ainsi que la nature, des suites définies par :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$;
2. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = e^{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}$;
3. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{(n^3 - 1 + n^2)\ln(1 + n^4)}{n^2 + 1}$;
4. $\forall n \geqslant 1, u_n = \sqrt{n^2 + n - 1} - n$;
5. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n^2 \ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{n!}\right)\right)$;
6. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$.