

10

Suites réelles

10.1 Généralités

10.1.1 Définition et premières propriétés

Définition 1

On appelle suite réelle toute application définie sur une partie de \mathbb{N} de la forme $\mathbb{N} \cap [n_0, +\infty[$ où $n_0 \in \mathbb{N}$ et à valeurs dans \mathbb{R} . Autrement dit, à tout entier naturel $n \geq n_0$, on associe un réel $u(n)$ qu'on note u_n .

On note $(u_n)_{n \geq n_0}$ une telle suite.

Le nombre réel u_n s'appelle le terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Remarque 1. L'ensemble des suites réelles se note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, car c'est l'ensemble des applications définies sur \mathbb{N} à valeurs dans \mathbb{R} .

Exemple 1. • Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n$.

On a $u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 2 \dots$

• Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = n + 1$.

On a $v_0 = 1, v_1 = 2, v_2 = 3 \dots$

• Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = 2n$.

On a $w_0 = 0, w_1 = 2, w_2 = 4 \dots$

• Soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $t_0 = 16$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, t_{n+1} = \sqrt{t_n}$.

On a $t_1 = 4, t_2 = 2, t_3 = \sqrt{2} \dots$

• Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0, F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

On a $F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, F_7 = 13, F_8 = 21 \dots$

Définition 2

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Soient $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_0}$ deux suites réelles.

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit la suite $(\lambda u_n)_{n \geq n_0}$ de terme général $\lambda \times u_n$.
2. On appelle somme des suites $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_0}$ la suite $(u_n + v_n)_{n \geq n_0}$ de terme général $u_n + v_n$.
3. On appelle produit des suites $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_0}$ la suite $(u_n v_n)_{n \geq n_0}$ de terme général $u_n v_n$.
4. On suppose que pour tout $n \geq n_0, v_n \neq 0$. On appelle quotient des suites $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_0}$ la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq n_0}$ de terme général $\frac{u_n}{v_n}$.

Définition 3: Suites majorées, minorées, bornées

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite réelle.

1. On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est majorée s'il existe un réel M tel que pour tout $n \geq n_0, u_n \leq M$.
2. On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est minorée s'il existe un réel m tel que pour tout $n \geq n_0, u_n \geq m$.
3. On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemple 2. • La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n$ est minorée par 0 mais n'est pas majorée.

• La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = -n$ est majorée par 0 mais n'est pas minorée.

• La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ est bornée puisque majorée par 1 et minorée par -1 .

• La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n n$ n'est ni majorée ni minorée.

Remarque 2. Il est équivalent de dire que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est majorée (resp. minorée, bornée) et que l'ensemble $\{u_n, n \geq n_0\}$ est majoré (resp. minoré, borné).

Proposition 1

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite réelle.

La suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est bornée si et seulement si il existe un réel positif r tel que pour tout $n \geq n_0, |u_n| \leq r$.

Démonstration. La suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est bornée si et seulement si l'ensemble $\{u_n, n \geq n_0\}$ est borné.

D'après un résultat du chapitre « Nombres réels », ceci équivaut au fait qu'il existe $r \geq 0$ tel que pour tout $n \geq n_0, |u_n| \leq r$. ■

Définition 4: Suites monotones

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite réelle.

1. On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est croissante (resp. strictement croissante) si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} \geq u_n$ (resp. $u_{n+1} > u_n$).
2. On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante (resp. strictement décroissante) si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} \leq u_n$ (resp. $u_{n+1} < u_n$).
3. On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est monotone si elle est croissante ou décroissante.
4. On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est constante si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} = u_n$.
5. On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire si elle est constante à partir d'un certain rang n_0 .

Remarque 3. • On montre par une récurrence immédiate que si la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est croissante (resp. décroissante, resp. constante), alors pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq u_{n_0}$ (resp. $u_n \leq u_{n_0}$, resp. $u_n = u_{n_0}$).

• Il est possible que ces propriétés ne soient vérifiées qu'à partir d'un certain rang $n_1 > n_0$ et on dit alors que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est croissante (ou décroissante, ou constante) à partir du rang n_1 .

Proposition 2

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite réelle.

1. La suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est croissante (resp. strictement croissante) si et seulement si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ (resp. $u_{n+1} - u_n > 0$).
2. La suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante (resp. strictement décroissante) si et seulement si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$ (resp. $u_{n+1} - u_n < 0$).
3. La suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est constante si et seulement si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} - u_n = 0$.

Démonstration. Immédiate d'après la définition. ■

Exemple 3. • La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3n - 2$ est strictement croissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 2 - (3n - 2) = 3n + 1 - 3n + 2 = 3 > 0.$$

• La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = -2n + 1$ est strictement décroissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} - u_n = -2(n+1) + 1 - (-2n + 1) = -2n - 1 + 2n - 1 = -2 < 0.$$

• La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \pi$ est constante.

10.1.2 Convergence

Dorénavant, on notera toujours une suite sous la forme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Si une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ n'est définie qu'à partir de l'entier n_0 , il suffit de poser une nouvelle suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_{n+n_0}$.

Définition 5

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Soit $l \in \mathbb{R}$.

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge (ou tend) vers l si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

On écrit alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ (ou $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$) et l est appelé la limite la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Dans le cas où $l = 0$, deux cas particuliers sont importants :

- (a) On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0^+ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $0 < u_n \leq \varepsilon$.

On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0^+$ (ou $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0^+$).

- (b) On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0^- si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $-\varepsilon \leq u_n < 0$.

On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0^-$ (ou $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0^-$).

Une suite qui converge est dite convergente ; une suite qui ne converge pas est dite divergente.

2. On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ (ou $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$) si

$$\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \geq A.$$

3. On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ (ou $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$) si

$$\forall A < 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \leq A.$$

Remarque 4. • En particulier, une suite qui tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ n'est pas bornée.

• La convergence d'une suite ne dépend pas de ses premiers termes. En effet, il suffit qu'une certaine inégalité ait lieu à partir d'un certain rang pour établir qu'une suite est convergente.

• Supposons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l . Soit $\varepsilon > 0$. Par définition, on sait qu'à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite seront dans l'intervalle $[l - \varepsilon, l + \varepsilon]$.

• Pour montrer la convergence d'une suite vers sa limite l , il suffit de prouver que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - l| \leq \alpha \varepsilon$ où α est un réel strictement positif qui ne dépend pas de ε . En effet, si ε parcourt \mathbb{R}_+^* , $\alpha \varepsilon$ fait de même.

- Par définition, on a l'équivalence

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - l| = 0.$$

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, on n'a pas forcément $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0^+$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0^-$.

En effet, soit $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ mais pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} > 0$ et $u_{2n+1} < 0$. On ne peut donc pas avoir $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0^+$ ni $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0^-$.

Proposition 3: Unicité de la limite

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Soient l et l' deux réels.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l et vers l' , alors $l = l'$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$.

Par définition, puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l , il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a

$$|u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

De même, puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l' , il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1$, on a

$$|u_n - l'| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $N = \max\{n_0, n_1\}$. Alors on a

$$\begin{aligned} |l - l'| &= |l - u_N + u_N - l'| \\ &\leq |l - u_N| + |u_N - l'| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, $|l - l'| \leq \varepsilon$, d'où $|l - l'| = 0$, i.e. $l = l'$. ■

Exemple 4. • La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{n}$ tend vers 0.

En effet, soit $\varepsilon > 0$. On a

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} \leq \varepsilon \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Posons $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$. Alors pour tout $n \geq n_0$, on a $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$ d'où $|u_n - 0| \leq \varepsilon$.

Ainsi, on a bien montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - l| \leq \varepsilon$, ce qui prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

• La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \sqrt{n}$ tend vers $+\infty$.

En effet, soit $A > 0$. On a $v_n \geq A \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq A \Leftrightarrow n \geq A^2$.

On pose $n_0 = \lfloor A^2 \rfloor + 1$. Alors pour tout $n \geq n_0$, on a $n \geq A^2$ d'où $v_n \geq A$. Ainsi, on a bien montré que pour tout $A > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $v_n \geq A$, ce qui prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

• Toute suite constante est convergente. En effet, soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite constante égale à a .

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - a| = 0 \leq \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Proposition 4

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers une limite $l \in \mathbb{R}$.
Alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$.

Par définition, puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l , il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a

$$|u_n - l| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $n \geq n_0$, on a

$$|u_n| \leq |u_n - l| + |l| \leq \varepsilon + |l|.$$

Soit $r = \max\{|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{n_0-1}|, \varepsilon + |l|\}$. Alors on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq r$, donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. ■

Proposition 5

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel l si et seulement si les deux suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent également vers le même réel l .
2. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) si et seulement si les deux suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ tendent également vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Démonstration.

1. • Supposons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$.

Par définition de la convergence, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

Montrons que les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers l .

Soit $\varepsilon > 0$. Alors pour tout $n \geq n_0$, on a $2n \geq n_0$ et $2n + 1 \geq n_0$ d'où

$$|u_{2n} - l| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad |u_{2n+1} - l| \leq \varepsilon.$$

Ceci assure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = l$.

- Supposons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = l \in \mathbb{R}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition, il existe deux entiers n_0 et n_1 tels que

$$\forall n \geq n_0, |u_{2n} - l| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \forall n \geq n_1, |u_{2n+1} - l| \leq \varepsilon.$$

Soit $N = \max(n_0, n_1)$. Alors pour tout $n \geq N$, on a $n \geq n_0$ et $n \geq n_1$ donc pour tout $n \geq N$, on a

$$|u_{2n} - l| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad |u_{2n+1} - l| \leq \varepsilon,$$

i.e.

$$\forall n \geq 2N, |u_n - l| \leq \varepsilon,$$

d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$.

2. • Supposons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. Par définition, on a

$$\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \geq A.$$

Montrons que les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ tendent vers $+\infty$.

Soit $A > 0$. Alors pour tout $n \geq n_0$, on a $2n \geq n_0$ et $2n + 1 \geq n_0$ d'où

$$u_{2n} \geq A \quad \text{et} \quad u_{2n+1} \geq A.$$

Ceci assure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = +\infty$.

- Supposons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = +\infty$.

Soit $A > 0$. Par définition, il existe deux entiers n_0 et n_1 tels que

$$\forall n \geq n_0, u_{2n} \geq A \quad \text{et} \quad \forall n \geq n_1, u_{2n+1} \geq A.$$

Soit $N = \max(n_0, n_1)$. Alors pour tout $n \geq N$, on a $n \geq n_0$ et $n \geq n_1$ donc pour tout $n \geq N$, on a

$$u_{2n} \geq A \quad \text{et} \quad u_{2n+1} \geq A,$$

i.e.

$$\forall n \geq 2N, u_n \geq A,$$

d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Le cas où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ se montre de la même manière en inversant les inégalités.



Exemple 5. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$ n'est pas convergente puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = -1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = -1$. Ainsi, les deux suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes de limite différente, ce qui implique que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut pas être convergente.

En revanche, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n| = 1$. Ainsi, une suite bornée n'est pas nécessairement convergente.

Proposition 6

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles convergeant vers $l \in \mathbb{R}$ et $l' \in \mathbb{R}$ respectivement.

1. Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la suite $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\lambda l + \mu l'$.
2. La suite $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l l'$.
3. Si la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang n_0 et si $l' \neq 0$, alors la suite $\left(\frac{1}{v_n}\right)_{n \geq n_0}$ converge vers $\frac{1}{l'}$ et $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq n_0}$ converge vers $\frac{l}{l'}$.
4. La suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $|l|$ (la réciproque est fautive).

Démonstration.

1. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Par définition, puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l , il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a

$$|u_n - l| \leq \varepsilon.$$

De même, puisque $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l' , il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1$, on a

$$|v_n - l'| \leq \varepsilon.$$

Soit $N = \max\{n_0, n_1\}$. Alors, pour tout $n \geq N$, on a

$$\begin{aligned} |\lambda u_n + \mu v_n - (\lambda l + \mu l')| &\leq |\lambda(u_n - l)| + |\mu(v_n - l')| \\ &\leq |\lambda||u_n - l| + |\mu||v_n - l'| \\ &\leq (|\lambda| + |\mu|)\varepsilon, \end{aligned}$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda u_n + \mu v_n = \lambda l + \mu l'$.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition, puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l , il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a

$$|u_n - l| \leq \varepsilon.$$

De même, puisque $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l' , il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1$, on a

$$|v_n - l'| \leq \varepsilon.$$

Enfin, puisque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, alors elle est bornée. Il existe donc un réel positif r tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq r$.

Soit $N = \max(n_0, n_1)$. On a alors pour tout $n \geq N$,

$$\begin{aligned} |u_n v_n - l l'| &= |u_n(v_n - l') + l'(u_n - l)| \\ &\leq |u_n||v_n - l'| + |l'||u_n - l| \\ &\leq (r + |l'|)\varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = ll'$.

3. Supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $v_n \neq 0$. Supposons également que $l' \neq 0$.

Montrons que la suite $\left(\frac{1}{v_n}\right)_{n \geq n_0}$ converge vers $\frac{1}{l'}$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l'$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1$,

$$|v_n - l'| \leq \frac{|l'|}{2} \neq 0.$$

En particulier, pour tout $n \geq n_1$,

$$|v_n| = |v_n - l' + l'| \geq ||v_n - l'| - |l'|| = |l'| - |v_n - l'| \geq |l'| - \frac{|l'|}{2} = \frac{|l'|}{2},$$

d'où pour tout $n \geq n_1$, $\frac{1}{|v_n|} \leq \frac{2}{|l'|}$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l'$, il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_2$, $|v_n - l'| \leq \varepsilon$.

Soit $N = \max(n_0, n_1, n_2)$. Alors pour tout $n \geq N$, on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{v_n} - \frac{1}{l'} \right| &= \left| \frac{l' - v_n}{l'v_n} \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{|l'|} \frac{2}{|l'|} \\ &= \frac{2\varepsilon}{|l'|^2} \end{aligned}$$

ce qui assure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{v_n} = \frac{1}{l'}$.

D'après l'alinéa précédent, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \times \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{v_n} = \frac{l}{l'}.$$

4. Soit $\varepsilon > 0$.

Par définition, puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l , il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a

$$|u_n - l| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $n \geq n_0$, on a

$$||u_n| - |l|| \leq |u_n - l| \leq \varepsilon,$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = |l|$. ■

Remarque 5. • La réciproque du deuxième alinéa est faux comme le montre l'exemple de la suite définie par $u_n = (-1)^n$. En effet, cette suite n'admet pas de limite puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = -1$.

En revanche, la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite constante égale à 1, donc elle converge vers 1.

• Si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$, alors la suite $(-u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $-l \in \mathbb{R}$.

• Dans le cas particulier où on prend la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ constante égale à $a \in \mathbb{R}$, on trouve que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n = l + a$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = l \times a$.

Proposition 7

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda u_n = +\infty$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_-^*$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda u_n = -\infty$.
2. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = 0^+$.
3. Si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite minorée (en particulier si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente ou si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$), alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n = +\infty$.
4. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente de limite $l \in \mathbb{R}$.
 - Si $l > 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = +\infty$.
 - Si $l < 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = -\infty$.
5. Si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ (resp. $-\infty$), alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = +\infty$ (resp. $-\infty$).

Remarque 6. En effet, si une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, elle est minorée car par définition, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $v_n \geq 1$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n \geq \min\{v_0, v_1, \dots, v_{n_0-1}, 1\}.$$

Démonstration.

1. • Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $A > 0$. Puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq \frac{A}{\lambda}$.

Ainsi, pour tout $n \geq n_0$, $\lambda u_n \geq A$, ce qui implique que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda u_n = +\infty$.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}_-^*$.

Alors $-\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ donc d'après ce qui précède, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\lambda u_n = +\infty$ d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda u_n = -\infty.$$

2. Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq \frac{1}{\varepsilon} > 0$ d'où

$$\forall n \geq n_0, 0 < \frac{1}{u_n} \leq \varepsilon,$$

ce qui implique que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = 0^+$.

3. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite minorée telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq m$, où $m \in \mathbb{R}$.

Soit $A > 0$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq A - m$.

Ainsi, pour tout $n \geq n_0$, on a

$$u_n + v_n \geq A - m + m = A,$$

ce qui implique que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n = +\infty$.

4. • Supposons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l > 0$. Par définition, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|v_n - l| \leq \frac{l}{2}$ donc pour tout $n \geq n_0$, $v_n \geq \frac{l}{2} > 0$.

Soit $A > 0$. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1$, $u_n \geq \frac{2A}{l} > 0$.

Soit $N = \max(n_0, n_1)$. Alors pour tout $n \geq N$, on a $u_n v_n \geq \frac{2A}{l} \frac{l}{2} = A$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = +\infty$.

- Supposons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l < 0$.

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} -v_n = -l > 0$ donc d'après ce qui précède,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(-v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} -u_n v_n = +\infty$$

d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = -\infty$.

5. • Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ (resp. $-\infty$).

Soit $A > 0$. Puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendent vers $+\infty$, il existe deux entiers n_0 et n_1 tels que

$$\forall n \geq n_0, u_n \geq \sqrt{A} > 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geq n_1, v_n \geq \sqrt{A} > 0$$

d'où pour tout $n \geq \max(n_0, n_1)$, $u_n v_n \geq A$, ce qui implique que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = +\infty$.

- Si la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$, alors la suite $(-v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, et d'après ce qui précède, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(-v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} -u_n v_n = +\infty$$

d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = -\infty$. ■

On a des résultats analogues pour une suite tendant vers $-\infty$:

Proposition 8

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda u_n = -\infty$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_-^*$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda u_n = +\infty$.
2. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = 0^-$.
3. Si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite majorée (en particulier si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente ou si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$), alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n = -\infty$.
4. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente de limite $l \in \mathbb{R}$.
 - Si $l > 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = -\infty$.
 - Si $l < 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = +\infty$.
5. Si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ (resp. $-\infty$), alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = -\infty$ (resp. $+\infty$).

Remarque 7. En effet, si une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$, elle est majorée car par définition, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq -1$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leq \max\{u_0, u_1, \dots, u_{n_0-1}, -1\}.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer les résultats de la proposition précédente à la suite $(-u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$ et prendre l'opposé des résultats obtenus. ■

Proposition 9

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

1. (a) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0^+$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$.

(b) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0^-$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = -\infty$.

2. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée.

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = 0$.

Démonstration.

1. (a) Supposons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0^+$ et montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$.

Soit $A > 0$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0^+$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $0 < u_n \leq \frac{1}{A}$ d'où

$$\forall n \geq n_0, \frac{1}{u_n} \geq A,$$

ce qui implique que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$.

(b) Supposons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0^-$, de telle sorte que $\lim_{n \rightarrow +\infty} -u_n = 0^+$.

D'après ce qui précède, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{u_n} = +\infty$ d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = -\infty.$$

2. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée, i.e. il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \leq r$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n| \leq \frac{\varepsilon}{r}$.

Ainsi, pour tout $n \geq n_0$,

$$|u_n v_n| \leq r |u_n| \leq r \frac{\varepsilon}{r} = \varepsilon,$$

ce qui prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = 0$. ■

Exemple 6. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{\cos(n)}{n}$.

La suite $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée et la suite $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers 0 donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers 0.

Remarque 8. On retient les règles suivantes quant aux opérations sur les limites : Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites.

Soient l et l' deux réels.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l'$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	forme indéterminée
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$	$-\infty$	forme indéterminée	$-\infty$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l > 0$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l < 0$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l' > 0$	ll'	0	ll'
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$	0	0	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l' < 0$	ll'	0	ll'
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$	$+\infty$	forme indéterminée	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$	$-\infty$	forme indéterminée	$+\infty$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l' > 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$	forme indéterminée	forme indéterminée
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l' < 0$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$	$-\infty$	$+\infty$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \neq 0$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{l}$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0^+$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0^-$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = -\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = 0^+$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = 0^-$

On a plusieurs formes indéterminées :

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, il peut tout se passer pour $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n$:
 - Si $u_n = n$ et $v_n = -n$, alors $u_n + v_n = 0$.
 - Si $u_n = n$ et $v_n = -n + 1$, alors $u_n + v_n = 1$.
 - Si $u_n = n^2$ et $v_n = -n$, alors $u_n + v_n = n^2 - n = n(n - 1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.
 - Si $u_n = n$ et $v_n = -n^2$, alors $u_n + v_n = n - n^2 = n(1 - n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$.
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$, il peut tout se passer pour $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n$:
 - Si $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = n$, alors $u_n v_n = 1$.
 - Si $u_n = \frac{1}{n^2}$ et $v_n = n$, alors $u_n v_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
 - Si $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = n^2$, alors $u_n v_n = n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Exemple 7. Pour lever une forme indéterminée de la forme $+\infty - \infty$ lorsqu'on est en présence de racines, multiplier par la quantité conjuguée permet de lever l'indétermination.

Par exemple, déterminons $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

On a

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Enfin, mentionnons les propriétés importantes suivantes :

Proposition 10

Soit $p \in \mathbb{Z}$.

Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = \begin{cases} +\infty & \text{si } p > 0 \\ 1 & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{si } p < 0. \end{cases}$$

Démonstration. • Soit $p > 0$. Montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = +\infty$.

Soit $A > 0$. Pour tout $n \geq A^{\frac{1}{p}}$, on a $n^p \geq A$.

Posons $n_0 = \lfloor A^{\frac{1}{p}} \rfloor + 1$.

Alors pour tout $n \geq n_0$, $n^p \geq A$.

Ceci montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = +\infty$.

• Soit $p = 0$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^p = 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = 1$.

• Soit $p < 0$. Montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $-p > 0$, on a montré précédemment qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $n^{-p} \geq \frac{1}{\varepsilon}$.

Ainsi, pour tout $n \geq n_0$, $0 < n^p \leq \varepsilon$, ce qui implique que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = 0$. ■

Remarque 9. Pour déterminer la limite d'expressions polynomiales ou de quotients de polynômes, on factorise par les termes de plus haut degré.

Exemple 8. • Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = n + 3$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = -n^2$.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ donc a priori, la limite de la suite $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est indéterminée.

Mais en factorisant par n^2 , on trouve :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -n^2 + n + 3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(-1 + \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2} \right).$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-1 + \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2} \right) = -1$ donc par produit des limites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(-1 + \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2} \right) = -\infty.$$

• Déterminons $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^3 + 4}{2n^3 - n + 5}$. A priori, c'est une forme indéterminée de la forme $\frac{+\infty}{+\infty} = +\infty \times 0$.

Pour cela, on factorise le numérateur et le dénominateur par les termes de plus haut degré :

$$\frac{3n^3 + 4}{2n^3 - n + 5} = \frac{n^3}{n^3} \frac{3 + \frac{4}{n^3}}{2 - \frac{1}{n^2} + \frac{5}{n^3}} = \frac{3 + \frac{4}{n^3}}{2 - \frac{1}{n^2} + \frac{5}{n^3}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2}.$$

Enfin, mentionnons un dernier résultat que nous démontrerons dans le chapitre « Limites et continuité ».

Théorème 1

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle de limite $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Soit f une application telle que $\lim_{x \rightarrow l} f(x) = l'$.

Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = l'.$$

Exemple 9. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1.$$

10.1.3 Résultats fondamentaux sur les limites et inégalités

Proposition 11

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

On suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite $l \in \mathbb{R}$.

1. Si $l > 0$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n > 0$.
2. Si $l < 0$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n < 0$.
3. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n > 0$ (ou $u_n \geq 0$), alors $l \geq 0$.
4. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n < 0$ (ou $u_n \leq 0$), alors $l \leq 0$.

Démonstration.

1. Supposons que $l > 0$. Soit $\varepsilon = \frac{l}{2} > 0$. Puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l , il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - l| \leq \varepsilon$, i.e.

$$\forall n \geq n_0, l - \varepsilon \leq u_n \leq l + \varepsilon,$$

d'où pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq l - \varepsilon = \frac{l}{2} > 0$.

2. Supposons que $l < 0$. Alors la suite $(-u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $-l > 0$ donc d'après l'alinéa précédent, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $-u_n > 0$, i.e. pour tout $n \geq n_0$, $u_n < 0$.
3. Supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n > 0$ (ou $u_n \geq 0$).
Supposons par l'absurde que $l < 0$. Alors d'après l'alinéa précédent, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1$, $u_n < 0$, ce qui contredit l'hypothèse que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq 0$.
L'hypothèse $l < 0$ est donc absurde, ce qui implique que $l \geq 0$.
4. Supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n < 0$ (ou $u_n \leq 0$).
Alors pour tout $n \geq n_0$, $-u_n > 0$ (ou $-u_n \geq 0$) donc d'après l'alinéa précédent, puisque la suite $(-u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $-l$, on a $-l \geq 0$ donc $l \leq 0$. ■

Remarque 10. Il faut noter qu'en passant à la limite, les inégalités strictes deviennent larges.

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1}{n} > 0$ mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Ainsi, si pour tout $n \geq n_0$, $u_n > 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \geq 0$.

Corollaire 1

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle convergente de limite $l \in \mathbb{R}$.

1. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n > a$ (ou $u_n \geq a$), alors $l \geq a$.
2. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \leq n_0$, $u_n < a$ (ou $u_n \leq a$), alors $l \leq a$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition précédente à la suite $(u_n - a)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $l - a$. ■

Théorème 2: Théorèmes de comparaison

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, alors $u_n \leq v_n$.

1. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.
2. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.
3. Si les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes de limites respectives l et l' , alors $l \leq l'$.

Démonstration.

1. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Soit $A > 0$. Il existe donc $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1$, $u_n \geq A$.

Soit $N = \max(n_0, n_1)$. Pour tout $n \geq N$, on a alors $A \leq u_n \leq v_n$, ce qui implique que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty.$$

2. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$. On a donc pour tout $n \geq n_0$, $-v_n \leq -u_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} -v_n = +\infty$.

D'après l'alinéa précédent, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} -u_n = +\infty$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

3. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l' \in \mathbb{R}$.

Ceci implique que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = l' - l$.

Par ailleurs, on a pour tout $n \geq n_0$, $v_n - u_n \geq 0$. Donc d'après la proposition précédente, ceci implique que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n \geq 0$, i.e. $l' - l \geq 0$ d'où $l \leq l'$. ■

Exemple 10. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (2 + (-1)^n)n$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 + (-1)^n \geq 1$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n$ donc par comparaison $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Remarque 11. Il y a des cas où l'on ne peut rien conclure :

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$, on ne peut rien conclure de l'inégalité $u_n \leq v_n$. Il se peut même que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admette pas de limite.

Par exemple, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$ et $v_n = n + 1$, alors on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ mais la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

- Idem si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$, on ne peut rien conclure quant à la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Théorème 3: Théorème des gendarmes

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites réelles. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n \leq w_n$.

On suppose en outre que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite $l \in \mathbb{R}$.

Alors la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l , il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1$, $|u_n - l| \leq \varepsilon$, ce qui implique en particulier que pour tout $n \geq n_1$, $u_n \geq l - \varepsilon$.

De même, puisque la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l , il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_2$, $|w_n - l| \leq \varepsilon$, ce qui implique en particulier que pour tout $n \geq n_2$, $w_n \leq l + \varepsilon$.

Posons $N = \max(n_0, n_1, n_2)$.

Alors pour tout $n \geq N$, on a

$$l - \varepsilon \leq u_n \leq v_n \leq w_n \leq l + \varepsilon$$

donc pour tout $n \geq N$, $l - \varepsilon \leq v_n \leq l + \varepsilon$, i.e. $|v_n - l| \leq \varepsilon$.

On en déduit que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$. ■

Exemple 11. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$.

Par définition de la partie entière, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leq nx$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{nx - 1}{n} < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x,$$

i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x - \frac{1}{n} < u_n \leq x$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} x - \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} x = x$, d'après le théorème des gendarmes, on peut en conclure que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x$.

10.1.4 Théorème de la limite monotone**Théorème 4: Théorème de la limite monotone**

1. Toute suite réelle croissante et majorée converge.
2. Toute suite réelle décroissante et minorée converge.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. On suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée. Puisqu'elle est majorée, l'ensemble $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une partie de \mathbb{R} non vide et majorée. Elle admet donc une borne supérieure $\sup(A)$.

Montrons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\sup(A)$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Par définition de $\sup(A)$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\sup(A) - \varepsilon < u_{n_0} \leq \sup(A)$.

Puisque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, alors pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq u_{n_0}$. De plus, par définition de $\sup(A)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \sup(A)$ donc pour tout $n \geq n_0$, on a

$$\sup(A) - \varepsilon < u_{n_0} \leq u_n \leq \sup(A)$$

i.e. pour tout $n \geq n_0$, $-\varepsilon < u_n - \sup(A) \leq 0 < \varepsilon$ d'où

$$\forall n \geq n_0, |u_n - \sup(A)| < \varepsilon,$$

ce qui prouve que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\sup(A)$.

2. On suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée. Il existe donc $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -u_n$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq -m$ donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.

D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = -u_{n+1} + u_n \geq 0$ puisque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

On en déduit que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée. D'après l'alinéa précédent, on en déduit qu'elle est convergente de limite $l \in \mathbb{R}$ donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $-l$.

■

Remarque 12. On a donc prouvé qu'une suite croissante et majorée converge vers son plus petit majorant. De même, une suite décroissante et minorée converge vers son plus grand minorant.

Exemple 12. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{nn!}$ pour tout entier naturel n non nul.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!} = \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} = -\frac{1}{n(n+1)(n+1)!} \leq 0.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 0$ donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée.

D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente. On montrera plus tard qu'elle converge vers e .

Théorème 5

1. Toute suite réelle croissante et non majorée tend vers $+\infty$.
2. Toute suite réelle décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. On suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et non majorée.

Soit $A > 0$. Puisque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée, A n'est pas un majorant de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donc il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > A$.

Puisque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, alors pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq u_{n_0} > A$, ce qui implique que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

2. On suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et non minorée.

Alors la suite $(-u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et non majorée donc d'après l'alinéa précédent, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} -u_n = +\infty$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

■

Remarque 13. En revanche, une suite non majorée (mais pas forcément croissante) ne tend pas nécessairement vers $+\infty$.

En effet, considérons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n n$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée (car $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = +\infty$) mais ne tend pas vers $+\infty$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = -\infty$.

10.2 Suites usuelles

10.2.1 Suites arithmétiques

Définition 6: Suites arithmétiques

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Soit $r \in \mathbb{R}$.

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r.$$

Exemple 13. Soit $r \in \mathbb{R}$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = nr$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = (n+1)r - nr = r$ donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r .

Remarque 14. Une suite arithmétique est de raison nulle si et seulement si elle est constante.

Proposition 12

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r .

Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr.$$

Démonstration. Montrons la propriété par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 0$, on a $u_0 + 0 \times r = u_0$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n = u_0 + nr$. Montrons la propriété au rang $n + 1$.

Puisque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r , on a

$$u_{n+1} = u_n + r = u_0 + nr + r = u_0 + (n+1)r,$$

ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$ et achève la récurrence. ■

Remarque 15. Ceci signifie qu'une suite arithmétique est entièrement définie par son premier terme et sa raison.

Exemple 14. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et raison $r = -5$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 - 5n$.

Corollaire 2: Limite d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r .

Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } r > 0 \\ u_0 & \text{si } r = 0 \\ -\infty & \text{si } r < 0. \end{cases}$$

Démonstration. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.

- Si $r > 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} nr = +\infty$ d'où le résultat.
- Si $r = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0$ d'où le résultat.
- Si $r < 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} nr = -\infty$ d'où le résultat. ■

Proposition 13: Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r .

Soient $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leq n$.

Alors

$$\sum_{k=p}^n u_k = \underbrace{(n-p+1)}_{\text{nombre de termes}} \times \underbrace{\frac{u_p + u_n}{2}}_{\text{moyenne des termes extrêmes}}.$$

En particulier, on a

$$\sum_{k=0}^n u_k = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}.$$

Démonstration. Soient $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leq n$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^n u_k &= \sum_{k=p}^n (u_0 + kr) \\ &= \sum_{k=p}^n u_0 + r \sum_{k=p}^n k \\ &= (n-p+1)u_0 + r(n-p+1) \times \frac{p+n}{2} \\ &= (n-p+1) \times \frac{2u_0 + pr + nr}{2} \\ &= (n-p+1) \times \frac{u_0 + pr + u_0 + nr}{2} \\ &= (n-p+1) \times \frac{u_p + u_n}{2}. \end{aligned}$$

Pour $p = 0$, on retrouve la formule

$$\sum_{k=0}^n u_k = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}.$$

Exemple 15. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme $u_0 = -3$ et de raison $r = 2$. Alors

$$\sum_{k=13}^{37} u_k = (37 - 13 + 1) \frac{u_{13} + u_{37}}{2} = 25 \frac{-3 + 2 \times 13 - 3 + 2 \times 37}{2} = 47 \times 25 = 1175.$$

10.2.2 Suites géométriques

Définition 7: Suites géométriques

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Soit $q \in \mathbb{R}$.

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison q si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q \times u_n.$$

Exemple 16. Soit $q \in \mathbb{R}$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = q^n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = q^{n+1} = q \times q^n = q \times u_n$ donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison q .

Remarque 16. Une suite géométrique est de raison $q = 1$ si et seulement si elle est constante.

Proposition 14

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q .

Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n.$$

Démonstration. Montrons la propriété par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 0$, on a $u_0 \times q^0 = u_0$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n = u_0 \times q^n$. Montrons la propriété au rang $n + 1$.

Puisque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison q , on a

$$u_{n+1} = q \times u_n = q \times u_0 \times q^n = u_0 \times q^{n+1},$$

ce qui prouve la formule au rang $n + 1$ et achève la récurrence. ■

Remarque 17. • Ceci signifie qu'une suite géométrique est entièrement définie par son premier terme et sa raison.

- Une suite géométrique de premier terme $u_0 = 0$ est identiquement nulle.
- Si $q = 0$, alors pour tout $n \geq 1$, $u_n = 0$. Ainsi, tous les termes d'une suite géométrique de raison nulle sont nuls, saufs éventuellement le premier terme u_0 .

Exemple 17. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme $\sqrt{2}$ et de raison π . Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{2} \times \pi^n$.

Corollaire 3: Limite d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme $u_0 \neq 0$ et de raison $q \in \mathbb{R}$.

1. Si $q > 1$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } u_0 > 0 \\ -\infty & \text{si } u_0 < 0. \end{cases}$$

2. Si $q = 1$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u_0.$$

3. Si $|q| < 1$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

4. Si $q \leq -1$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.

Démonstration. D'après la proposition précédente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$. Il s'agit donc de déterminer la limite de la suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ si celle-ci existe.

1. Supposons que $q > 1$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln(q)} = +\infty$ car $\ln(q) > 0$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_0 \times q^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } u_0 > 0 \\ -\infty & \text{si } u_0 < 0. \end{cases}$$

2. Supposons que $q = 1$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0$ donc le résultat en découle.

3. Supposons $|q| < 1$, i.e. $-1 < q < 1$.

- Si $0 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln(q)} = 0$ car $\ln(q) < 0$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_0 \times q^n = 0.$$

- Si $q = 0$, alors pour tout $n \geq 1$, $u_n = 0$ donc le résultat en découle.
- Si $-1 < q < 0$ alors $0 < -q < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n (-q)^n = 0$ car la suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et la suite $((-q)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0. On a donc bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_0 \times q^n = 0$.

4. Supposons que $q \leq -1$.

- Si $q = -1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n u_0$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{2n} = u_0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u_0 \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = -u_0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -u_0.$$

Or, $u_0 \neq -u_0$ car $u_0 \neq 0$ donc les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes de limites différentes. On en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.

- Si $q < -1$. Alors $-q > 1$ et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times (-1)^n (-q)^n$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{2n} = u_0 \times (-q)^{2n} = u_0 \times (q^2)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} +\infty & \text{si } u_0 > 0 \\ -\infty & \text{si } u_0 < 0. \end{cases}$$

car $q^2 > 1$ et

$$u_{2n+1} = -u_0 \times (-q)^{2n+1} = -u_0 \times q \times (q^2)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} -\infty & \text{si } u_0 > 0 \\ +\infty & \text{si } u_0 < 0. \end{cases}$$

car $q < 0$ et $q^2 > 1$.

Ainsi, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1}$ donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas de limite. ■

Proposition 15: Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q . Soient $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leq n$.

Alors

$$\sum_{k=p}^n u_k = \begin{cases} u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \\ (n - p + 1)u_0 & \text{si } q = 1. \end{cases}$$

En particulier, on a

$$\sum_{k=0}^n u_k = \begin{cases} u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \\ (n + 1)u_0 & \text{si } q = 1. \end{cases}$$

Démonstration. Soient $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leq n$.

- Si $q = 1$, alors $\sum_{k=p}^n u_k = \sum_{k=p}^n u_0 = (n - p + 1)u_0$.
- Si $q \neq 1$, on a

$$\sum_{k=p}^n u_k = \sum_{k=p}^n u_0 \times q^k = u_0 \sum_{k=p}^n q^k = u_0 \times q^p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}.$$

Remarque 18. Si $q \neq 1$, on retient cette formule sous la forme

$$\sum_{k=p}^n u_k = (\text{premier terme}) \times \frac{1 - q^{(\text{nombre de termes})}}{1 - q}.$$

Exemple 18. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = -2$.
Alors

$$\sum_{k=7}^{21} u_k = u_7 \frac{1 - (-2)^{21-7+1}}{1 - (-2)} = 3 \times (-2)^7 \frac{1 - (-2)^{15}}{3} = -128(2^{15} + 1).$$

10.2.3 Suites arithmético-géométriques

Définition 8: Suites arithmético-géométriques

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite arithmético-géométrique s'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b.$$

Remarque 19. • Si $a = 0$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire et pour tout $n \geq 1$, $u_n = b$.

• Si $a = 1$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison b .

• Si $b = 0$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison a .

• Supposons que $a \neq 1$. Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$, alors on a également $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l$ donc en passant à la limite dans la relation $u_{n+1} = au_n + b$, on obtient $l = al + b$

d'où $l = \frac{b}{1-a}$. Ceci légitime la proposition suivante, qui va servir de méthode pour étudier les suites arithmético-géométriques en pratique.

Proposition 16

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq 1$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique qui vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$. Posons $l = \frac{b}{1-a}$.

Alors la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - l$ est géométrique de raison a .

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a^n(u_0 - l) + l$.

En particulier, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente si $|a| < 1$ ou si $u_0 = l$ et dans ce cas

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l = \frac{b}{1-a}.$$

Démonstration. Montrons que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison a .

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$v_{n+1} = u_{n+1} - l = au_n + b - \frac{b}{1-a} = au_n - \frac{ab}{1-a} = a \left(u_n - \frac{b}{1-a} \right) = a(u_n - l) = av_n,$$

ce qui prouve que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison a .

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times a^n = (u_0 - l) \times a^n$.

Il s'ensuit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + l = a^n(u_0 - l) + l$.

D'après l'étude des suites géométriques, on en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si $|a| < 1$ (car $a = 1$ est impossible ici) et dans ce cas $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^n(u_0 - l) + l = l.$$

■

Exemple 19. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle de premier terme $u_0 = 2$ qui vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3$.

Commençons par chercher l tel que $l = \frac{1}{2}l - 3 \Leftrightarrow \frac{l}{2} = -3 \Leftrightarrow l = -6$.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - l = u_n + 6$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 6 = \frac{1}{2}u_n - 3 + 6 = \frac{1}{2}u_n + 3 = \frac{1}{2}(u_n + 6) = \frac{1}{2}v_n$$

donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$, ce qui implique que

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{u_0 + 6}{2^n} = \frac{8}{2^n} = \frac{1}{2^{n-3}},$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = v_n - 6 = \frac{1}{2^{n-3}} - 6$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-3}} = 0$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -6$.

10.2.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 9: Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie une récurrence linéaire d'ordre 2 s'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Remarque 20. • Une suite récurrente linéaire d'ordre 2 est entièrement définie par ses deux premiers termes u_0 et u_1 et la relation de récurrence. En effet, la relation $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ ne permet de calculer u_2 pour $n = 0$ qu'à la condition que l'on connaisse u_0 et u_1 .

- Si $b = 0$, la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique de raison a .
- Si $(a, b) = (0, 0)$, alors pour tout $n \geq 2$, $u_n = 0$.

Exemple 20. La suite de Fibonacci $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $F_0 = 0, F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Théorème 6

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

On appelle équation caractéristique de cette suite récurrente l'équation

$$(E) : r^2 - ar - b = 0$$

de discriminant $\Delta = a^2 + 4b$.

1. Si $\Delta > 0$, notons r_1 et r_2 les deux solutions réelles distinctes de (E) .

Alors il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

2. Si $\Delta = 0$, notons r l'unique solution de (E) .

Alors il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda + \mu n)r^n.$$

3. Si $\Delta < 0$, alors il existe $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ telles que les deux solutions complexes conjuguées de (E) soient $r_1 = \rho e^{i\theta}$ et $r_2 = \rho e^{-i\theta}$ (on a $\rho = |r_1|$ et $\theta \equiv \arg(r_1)[2\pi]$).

Alors il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \rho^n (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)).$$

Remarque 21. Il est logique qu'une suite récurrente linéaire d'ordre deux dépende de deux paramètres λ et μ puisqu'elle est entièrement déterminée par ses deux premières valeurs u_0 et u_1 .

Démonstration.

1. Supposons que $\Delta > 0$. L'équation (E) admet alors deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 . Ainsi, $r_1^2 = ar_1 + b$ et $r_2^2 = ar_2 + b$.

• Montrons que pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ vérifie la relation de récurrence $v_{n+2} = av_{n+1} + bv_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} v_{n+2} &= \lambda r_1^{n+2} + \mu r_2^{n+2} \\ &= \lambda r_1^n \times r_1^2 + \mu r_2^n \times r_2^2 \\ &= \lambda r_1^n (ar_1 + b) + \mu r_2^n (ar_2 + b) \\ &= a(\lambda r_1^{n+1} + \mu r_2^{n+1}) + b(\lambda r_1^n + \mu r_2^n) \\ &= av_{n+1} + bv_n. \end{aligned}$$

Ainsi, toutes les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la forme $v_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ vérifient la relation de récurrence $v_{n+2} = av_{n+1} + bv_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• Montrons maintenant que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'écrit nécessairement de cette forme.

Cherchons $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$. Pour $n = 0$ et $n = 1$, ceci implique que

$$\begin{cases} u_0 = \lambda + \mu \\ u_1 = \lambda r_1 + \mu r_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{r_2 u_0 - u_1}{r_2 - r_1} \\ \mu = \frac{r_1 u_0 - u_1}{r_1 - r_2}, \end{cases}$$

ce qui est possible car $r_1 \neq r_2$. Il y a donc un unique couple (λ, μ) qui convient. Pour ce λ et ce μ , les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\lambda r_1^n + \mu r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ont les mêmes deux premiers termes et vérifient la même relation de récurrence d'ordre 2 : elles sont donc égales.

On a donc bien $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ où (λ, μ) est le couple trouvé précédemment.

2. Supposons que $\Delta = 0$. L'équation (E) admet donc une racine double $r = \frac{a}{2}$, d'où $a = 2r$.

• Montrons que pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = (\lambda + \mu n)r^n$ vérifie la relation de récurrence $v_{n+2} = av_{n+1} + bv_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} av_{n+1} + bv_n &= a(\lambda + \mu(n+1))r^{n+1} + b(\lambda + \mu n)r^n \\ &= \lambda r^n(ar + b) + \mu r^n(anr + ar + bn) \\ &= \lambda r^n \times r^2 + \mu r^n(n(ar + b) + 2r^2) \\ &= \lambda r^{n+2} + \mu r^n(nr^2 + 2r^2) \\ &= (\lambda + \mu(n+2))r^{n+2} \\ &= v_{n+2}. \end{aligned}$$

Ainsi, toutes les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la forme $v_n = (\lambda + \mu n)r^n$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ vérifient la relation de récurrence $v_{n+2} = av_{n+1} + bv_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• Montrons maintenant que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'écrit nécessairement de cette forme.

Cherchons $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (\lambda + \mu n)r^n$. Pour $n = 0$ et $n = 1$, ceci implique que

$$\begin{cases} u_0 = \lambda \\ u_1 = (\lambda + \mu)r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = u_0 \\ \mu = \frac{u_1 - u_0 r}{r} \end{cases},$$

si $r \neq 0$.

Si $r = \frac{a}{2} = 0$, on a $a = 0$. Or $\Delta = a^2 + 4b = 0$ donc $b = 0$, d'où $(a, b) = (0, 0)$ ce qui est contraire à notre hypothèse de départ. Donc on a toujours $r \neq 0$ d'où l'unicité du couple (λ, μ) .

On conclut comme dans le premier cas que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (\lambda + \mu n)r^n$.

3. Supposons que $\Delta < 0$. Alors l'équation (E) admet deux solutions complexes conjuguées $r_1 = \rho e^{i\theta}$ et $r_2 = \rho e^{-i\theta}$ avec $\rho = |r_1| \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

• On vérifie comme dans le premier cas que pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ vérifie la relation de récurrence $v_{n+2} = av_{n+1} + bv_n$. Mais c'est une suite à valeurs complexes. Or, on cherche l'expression de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui est une suite réelle.

En prenant $(\lambda, \mu) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, on trouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{1}{2}\rho^n e^{in\theta} + \frac{1}{2}\rho^n e^{-in\theta} = \rho^n \left(\frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} \right) = \rho^n \cos(n\theta).$$

De même, en prenant $(\lambda, \mu) = (\frac{1}{2i}, -\frac{1}{2i})$, on trouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n = \frac{1}{2i}\rho^n e^{in\theta} - \frac{1}{2i}\rho^n e^{-in\theta} = \rho^n \left(\frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i} \right) = \rho^n \sin(n\theta).$$

On vient donc de trouver deux suites réelles $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui vérifient la même relation de récurrence d'ordre 2.

Ainsi, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\lambda v_{n+2} + \mu w_{n+2} = \lambda(av_{n+1} + bv_n) + \mu(aw_{n+1} + bw_n) = a(\lambda v_{n+1} + \mu w_{n+1}) + b(\lambda v_n + \mu w_n)$$

donc la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$t_n = \lambda v_n + \mu w_n = \rho^n (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))$$

vérifie la même relation de récurrence.

• Réciproquement, montrons qu'il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \rho^n (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)).$$

Pour $n = 0$ et $n = 1$, cette relation implique

$$\begin{cases} u_0 &= & \lambda \\ u_1 &= & \rho(\lambda \cos(\theta) + \mu \sin(\theta)) \end{cases}$$

Puisque les solutions ne sont pas réelles, nécessairement $\theta \not\equiv 0[\pi]$ donc $\sin(\theta) \neq 0$ et on trouve $\mu = \frac{u_1 - \rho u_0 \cos(\theta)}{\rho \sin(\theta)}$.

Encore une fois, on a unicité du couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et on conclut comme dans les cas précédents. ■

Exemple 21. • Calculons l'expression du terme général de la suite de Fibonacci $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ définie par $F_0 = 0, F_1 = 1$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

L'équation caractéristique associée est $(E) : r^2 - r - 1 = 0$.

Son discriminant est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$ et ses racines sont

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

(r_1 est le nombre connu sous le nom de « nombre d'or ».)

Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n = \lambda \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \mu \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Pour $n = 0$ et $n = 1$, on obtient le système suivant

$$\begin{cases} 0 &= & \lambda + \mu \\ 1 &= & \lambda \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \mu \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu &= & -\lambda \\ 1 &= & \lambda \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda &= & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \mu &= & -\frac{1}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

Ainsi, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

• Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $u_0 = -1, u_1 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -2u_{n+1} - u_n.$$

L'équation caractéristique associée est $(E) : r^2 + 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r + 1)^2 = 0$ qui admet -1 comme racine double.

Il existe donc un couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda + \mu n)(-1)^n.$$

Pour $n = 0$ et $n = 1$, on obtient le système

$$\begin{cases} -1 & = & \lambda \\ 2 & = & -(\lambda + \mu) \end{cases}$$

d'où $(\lambda, \mu) = (-1, -1)$. Ainsi, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n(-1 - n) = (-1)^{n+1}(n + 1).$$

- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $u_0 = 0, u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -u_n$.

L'équation caractéristique associée est $r^2 + 1 = 0$. Les deux solutions complexes conjuguées sont $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ donc il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \mu \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right).$$

Pour $n = 0$ et $n = 1$, on obtient le système

$$\begin{cases} \lambda & = & 0 \\ \mu & = & 1 \end{cases}$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$.

10.2.5 Suites adjacentes

Définition 10: Suites adjacentes

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles.

On dit que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes si elles vérifient les trois propriétés suivantes :

- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
- La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- La suite $(v_n - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = 0$.

Remarque 22. On ne suppose pas a priori que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soient convergentes.

Exemple 22. Posons pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{n}$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$ donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0$ donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$v_n - u_n = \frac{2}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

donc les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

Lemme 1

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites adjacentes avec la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante et la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante.

Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n.$$

Démonstration. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = v_n - u_n$.

Par définition des suites adjacentes, la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$w_{n+1} - w_n = (v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) = (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n).$$

Puisque les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont décroissante et croissante respectivement, on a $v_{n+1} - v_n \leq 0$ et $u_{n+1} - u_n \geq 0$ donc $w_{n+1} - w_n \leq 0$.

Ainsi, la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0.

Nécessairement (cf. preuve du théorème de la limite monotone), alors $0 = \inf\{w_n, n \in \mathbb{N}\}$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \geq 0$, i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n. \quad \blacksquare$$

Remarque 23. Avec les mêmes notations que précédemment, on a donc pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_{n-1} \leq u_n \leq v_n \leq v_{n-1} \leq \dots \leq v_2 \leq v_1 \leq v_0.$$

Théorème 7: Théorème des suites adjacentes

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites adjacentes.

Alors les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes et on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$

Démonstration. On peut supposer sans perte de généralité que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

D'après le lemme précédent, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$. Puisque la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq v_0$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_0$.

Ainsi, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par v_0 . D'après le théorème de la limite monotone, elle est donc convergente vers une limite $l \in \mathbb{R}$.

De même, puisque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_0 \leq u_n \leq v_n$ donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par u_0 .

D'après le théorème de la limite monotone, elle est convergente vers une limite l' .

Or, par hypothèse, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = l' - l = 0$ donc $l = l'$.

On en conclut que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes et de même limite. \blacksquare

Remarque 24. • Une fois prouvée la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on pouvait simplement remarquer que $v_n = (v_n - u_n) + u_n$ donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge comme somme de suites convergentes et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) + \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 + l = l.$$

• Avec les mêmes notations que dans la preuve, si on note l la limite commune des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_{n-1} \leq u_n \leq l \leq v_n \leq v_{n-1} \leq \dots \leq v_2 \leq v_1 \leq v_0.$$

Exemple 23. Dans l'exemple pris ci-dessus, les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeaient toutes deux vers 1.

10.2.6 Etudes de suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

On s'intéresse dans cette section aux suites définies par récurrence, c'est à dire aux suites vérifiant une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ où $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ est une application définie sur \mathcal{D} . Pour cela, il est donc nécessaire de fixer le premier terme de la suite $u_0 \in \mathcal{D}$ et de s'assurer que l'ensemble \mathcal{D} est stable par f , i.e. $f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$.

Ensuite, il peut être utile de déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en vue d'utiliser le théorème de la limite monotone.

Pour cela, on peut étudier le signe de $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$, ce qui revient à étudier le signe de $f(x) - x$ pour $x \in \mathcal{D}$.

Enfin, on a le théorème important suivant, qui sera démontré dans le chapitre « Limites et continuité ».

Théorème 8

Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$. Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. On suppose que $f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$.
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle définie par $u_0 \in \mathcal{D}$ et par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite $l \in \mathcal{D}$.
Alors l est un point fixe de f , i.e.

$$l = f(l).$$

Remarque 25. Ce théorème signifie que les limites éventuelles d'une telle suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont à chercher parmi les points fixes de f , c'est à dire les solutions de l'équation $f(x) = x$.

Exemple 24. Etudions la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = u_n(1 + u_n)$.

On a bien une suite définie par récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : x \mapsto x(1 + x)$ est définie sur \mathbb{R} tout entier.

Cherchons les points fixes de f , c'est à dire résolvons l'équation $f(x) = x$. On a

$$f(x) = x \Leftrightarrow x(1 + x) = x \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Ainsi, la seule limite possible de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est $l = 0$.

Par ailleurs, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n(1 + u_n) - u_n = u_n^2 \geq 0$ donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Il y a maintenant plusieurs cas selon la valeur de u_0 :

- Si $u_0 > 0$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > u_0 > 0$. La suite ne peut donc pas converger vers 0. Elle est donc croissante et non majorée, donc elle diverge vers $+\infty$.

- Si $u_0 = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$ donc la suite est constante égale à 0 et on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

- Si $-1 < u_0 < 0$, puisque pour tout $x \in]-1, 0[$, $-1 < x < f(x) < 0$, l'intervalle $] -1, 0[$ est stable par f et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 < u_n \leq u_{n+1} < 0$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante et majorée. D'après le théorème de la limite monotone, elle est convergente.

La seule limite possible étant 0, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

- Si $u_0 = -1$, on a $u_1 = 0$ et pour tout $n \geq 1$, $u_n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- Si $u_0 < -1$, on a $u_1 = f(u_0) > 0$ et donc pour tout $n \geq 1$, $u_n > 0$ donc on trouve comme dans le premier cas, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

On en conclut donc que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 \leq u_0 \leq 0 \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque 26. La monotonie de f donne également des informations intéressantes sur la suite.

- Si f est croissante, alors la suite est monotone.

En effet, si $u_0 \leq u_1$, alors $u_1 = f(u_0) \leq f(u_1) = u_2$ et on en déduit aisément par récurrence que la suite est croissante.

En revanche, si $u_0 \geq u_1$, alors $u_1 = f(u_0) \geq f(u_1) = u_2$ et on en déduit aisément par récurrence que la suite est décroissante.

- Si f est décroissante, alors $f \circ f$ est croissante donc les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones.

10.3 Etude asymptotique

10.3.1 Croissances comparées

Pour $a > 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n! = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty.$$

Toutefois, ces trois suites ne tendent pas vers $+\infty$ « à la même vitesse ». L'objet du théorème suivant est de comparer les croissances de ces suites.

Théorème 9: Théorème de croissances comparées

Soit $a > 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{a^n} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = +\infty.$$

Démonstration. • Montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{a^n} = +\infty$. Soit $N = [a] + 1$.

Pour tout $n > N$ on a

$$\frac{n!}{a^n} = \prod_{k=1}^n \frac{k}{a} = \prod_{k=1}^N \frac{k}{a} \prod_{k=N+1}^n \frac{k}{a} > \frac{N!}{a^N} \left(\frac{N}{a}\right)^{n-N} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

puisque $\frac{N}{a} > 1$, donc par comparaison, on obtient bien

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{a^n} = +\infty.$$

- Montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = +\infty$.

On a

$$\frac{a^n}{n^\alpha} = e^{n \ln(a) - \alpha \ln(n)} = e^{n(\ln(a) - \alpha \frac{\ln(n)}{n})}.$$

Or, par croissance comparée, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$ donc puisque $\ln(a) > 0$, on obtient par composition des limites que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n(\ln(a) - \alpha \frac{\ln(n)}{n})} = +\infty$$

d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = +\infty$. ■

Remarque 27. • Il faut retenir que la factorielle domine les suites géométriques, qui elles-mêmes dominent les suites puissances.

- Ceci implique en particulier que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^\alpha} = +\infty$.

Exemple 25. • $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{37}}{3^n} = 0$.

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \sqrt{n} = 0$.

10.3.2 Suites équivalentes

Définition 11: Suites équivalentes

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles ne s'annulant pas à partir d'un certain rang, i.e. on suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \neq 0$ et $v_n \neq 0$.
On dit que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont équivalentes, et on note $u_n \sim v_n$ si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Remarque 28. Dans ce cas, on a également $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$.

Exemple 26. • On a $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ donc $n \sim n+1$.

- On a $\frac{\sqrt{n^2 - 3n + 4}}{n} = \sqrt{1 - \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ donc

$$\sqrt{n^2 - 3n + 4} \sim n.$$

Proposition 17

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites équivalentes.
On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l.$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = u_n \times \frac{v_n}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \times 1 = l$. ■

Remarque 29. On vient donc de montrer que deux suites équivalentes ont même limite. Mais la réciproque est fautive.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n} = +\infty$.

On a toutefois une réciproque partielle :

Proposition 18

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \in \mathbb{R}^*$.

Alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalente à la suite constante égale à l , i.e.

$$u_n \sim l.$$

Démonstration. On a vu qu'une suite qui tend vers une limite non nulle est du signe de cette limite à partir d'un certain rang. En particulier, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang et on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{l} = \frac{l}{l} = 1$$

donc $u_n \sim l$. ■

Remarque 30. En revanche, il est formellement interdit d'écrire $u_n \sim 0$.

La notion d'équivalence vérifie les propriétés fondamentales suivantes :

Proposition 19: Propriétés de l'équivalence

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

1. (Réflexivité) On a $u_n \sim u_n$.
2. (Symétrie) Si $u_n \sim v_n$ alors $v_n \sim u_n$.
3. (Transitivité) Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$, alors $u_n \sim w_n$.
4. Si $u_n \sim v_n$ alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\lambda u_n \sim \lambda v_n$.
5. Si $u_n \sim v_n$ alors $\frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{v_n}$.
6. Si $u_n \sim v_n$, alors pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $u_n^p \sim v_n^p$.
Si de plus, les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont strictement positives à partir d'un certain rang, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$.
7. Si $u_n \sim v_n$, alors $|u_n| \sim |v_n|$.
8. Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim x_n$, alors

$$u_n w_n \sim v_n x_n \quad \text{et} \quad \frac{u_n}{w_n} \sim \frac{v_n}{x_n}.$$

Démonstration.

1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_n}{u_n} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

2. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{u_n}{v_n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1,$$

donc $v_n \sim u_n$.

3. On a

$$\frac{u_n}{w_n} = \frac{u_n}{v_n} \frac{v_n}{w_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

donc $u_n \sim w_n$.

4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Alors

$$\frac{\lambda u_n}{\lambda v_n} = \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

donc $\lambda u_n \sim \lambda v_n$.

5. On a

$$\frac{\frac{1}{u_n}}{\frac{1}{v_n}} = \frac{v_n}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

donc $\frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{v_n}$.

6. Soit $p \in \mathbb{Z}$. Alors

$$\frac{u_n^p}{v_n^p} = \left(\frac{u_n}{v_n}\right)^p \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

donc $u_n^p \sim v_n^p$.

Supposons que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont strictement positives à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors

$$\frac{u_n^\alpha}{v_n^\alpha} = \frac{e^{\alpha \ln(u_n)}}{e^{\alpha \ln(v_n)}} = e^{\alpha(\ln(u_n) - \ln(v_n))} = e^{\alpha \ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

par composition de limites.

7. Par composition de limites, puisque $\lim_{x \rightarrow 1} |x| = 1$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|u_n|}{|v_n|} = \left| \frac{u_n}{v_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

donc $|u_n| \sim |v_n|$.

8. On a

$$\frac{u_n w_n}{v_n x_n} = \frac{u_n}{v_n} \frac{w_n}{x_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \times 1 = 1$$

donc $u_n w_n \sim v_n x_n$ et

$$\frac{\frac{u_n}{w_n}}{\frac{v_n}{x_n}} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{x_n}{w_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \times 1 = 1$$

donc $\frac{u_n}{w_n} \sim \frac{v_n}{x_n}$.

■

Exemple 27. • On a

$$\frac{\sqrt{n^2 + 5n - 1}}{2n + 3} \sim \frac{n}{2n} \sim \frac{1}{2}.$$

• On a

$$\frac{1}{\sqrt{n}} - 2 \frac{\sin(n)}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 - 2 \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} \right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \times 1 = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Remarque 31. En revanche, on ne peut pas additionner les équivalents.

En effet, on a $n \sim n + 1$ et $-n \sim -n$ mais on n'a pas $n - n \sim n + 1 - n$ car sinon on aurait $0 \sim 1!$

On ne peut pas non plus les composer par des fonctions. En effet, on a $n \sim n + 1$ mais $\frac{e^{n+1}}{e^n} = e$ ne tend pas vers 1 donc $e^{n+1} \not\sim e^n$.

Les équivalents suivants sont importants et à connaître :

Proposition 20: Equivalents de référence

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle qui ne s'annule pas à partir d'un certain rang et telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. Alors

- | | |
|---|--|
| 1. $\sin(u_n) \sim u_n$; | 4. $\ln(1 + u_n) \sim u_n$; |
| 2. $\tan(u_n) \sim u_n$; | 5. $e^{u_n} - 1 \sim u_n$; |
| 3. $1 - \cos(u_n) \sim \frac{u_n^2}{2}$; | 6. $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*, (1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$. |

Remarque 32. En particulier, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0, alors $\sqrt{1+u_n} - 1 \sim \frac{u_n}{2}$.

Démonstration.

1. On a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \sin'(0) = \cos(0) = 1$ donc par composition de limites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(u_n)}{u_n} = 1$$

d'où $\sin(u_n) \sim u_n$.

2. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1$, par composition de limites, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(u_n) = 1$. Ainsi, on a

$$\tan(u_n) = \frac{\sin(u_n)}{\cos(u_n)} \sim \frac{u_n}{1} = u_n.$$

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$ donc $1 - \cos(2x) = 2\sin^2(x)$. On en déduit que

$$1 - \cos(u_n) = 2\sin^2\left(\frac{u_n}{2}\right) \sim 2\left(\frac{u_n}{2}\right)^2 = \frac{u_n^2}{2}.$$

On peut utiliser l'équivalent $\sin\left(\frac{u_n}{2}\right) \sim \frac{u_n}{2}$ car si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, alors on a aussi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{2} = 0.$$

4. On a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ donc par composition de limites

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+u_n)}{u_n} = 1$$

donc $\ln(1+u_n) \sim u_n$.

5. On a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \exp'(0) = e^0 = 1$ donc par composition de limites

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{u_n} - 1}{u_n} = 1,$$

d'où $e^{u_n} - 1 \sim u_n$.

6. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. En se servant du fait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha \ln(1+u_n) = 0$ et des deux résultats précédents, on a

$$(1+u_n)^\alpha - 1 = e^{\alpha \ln(1+u_n)} - 1 \sim \alpha \ln(1+u_n) \sim \alpha u_n.$$

■

Exemple 28. On a

$$\frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)} \sim \frac{-\frac{1}{2n^2}}{\frac{1}{n}} \sim -\frac{1}{2n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Enfin, signalons la formule de Stirling, qui est un équivalent célèbre, mais que nous ne démontrerons ni n'utiliserons pas :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$