Corrigé du devoir maison n°5

# Problème : Fonctions hyperboliques

1. On vérifie d'abord que ch est paire et sh impaire. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathrm{ch}(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \mathrm{ch}(x)$$

donc ch est paire.
De même, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{sh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = -\mathrm{sh}(x)$$

donc sh est impaire.
Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2} + \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2} = e^{x}$. On a donc bien montré que $\boxed{\text{ch et sh sont les parties paire et impaire de la fonction exponentielle réelle.}}$

2. (a) Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y) &= \left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\right) + \left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(e^{x+y} + e^{x-y} + e^{y-x} + e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{x-y} - e^{y-x} + e^{-x-y}\right) \\
&= \frac{2e^{x+y} + 2e^{-x-y}}{4} \\
&= \frac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2} \\
&= \mathrm{ch}(x+y)
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y).}$
De même, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(y) &= \left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\right) + \left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(e^{x+y} + e^{x-y} - e^{y-x} - e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{x-y} + e^{y-x} - e^{-x-y}\right) \\
&= \frac{2e^{x+y} - 2e^{-x-y}}{4} \\
&= \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{2} \\
&= \mathrm{sh}(x+y)
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(y).}$
On en déduit que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathrm{ch}(x-y) = \mathrm{ch}(x + (-y)) = \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(-y) + \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(-y)$$

d'où, par parité de ch et imparité de sh,

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \mathrm{ch}(x-y) = \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y) - \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y).}$$

De même, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\mathrm{sh}(x-y) = \mathrm{sh}(x+(-y)) = \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(-y) + \mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(-y)$$

donc par les mêmes arguments,

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \mathrm{sh}(x-y) = \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(y) - \mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(y).}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a d'après la question précédente

$$\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(x) = \mathrm{ch}(x-x) = \mathrm{ch}(0) = 1$$

d'où $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1.}$

(c) D'après la question 2.$(a)$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{ch}(2x) = \mathrm{ch}(x+x) = \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(x)$$

d'où $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}(2x) = \mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}^2(x).}$

En utilisant la relation prouvée à la question précédente, on a pour tout $x \in \mathbb{R}, \mathrm{sh}^2(x) = \mathrm{ch}^2(x) - 1$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}(2x) = \mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{ch}^2(x) - 1$ d'où

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}(2x) = 2\mathrm{ch}^2(x) - 1.}$$

De même, en utilisant la même relation, on a pour tout $x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}^2(x) = \mathrm{sh}^2(x) + 1$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}(2x) = \mathrm{sh}^2(x) + 1 + \mathrm{sh}^2(x)$ d'où

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}(2x) = 2\mathrm{sh}^2(x) + 1.}$$

Enfin, d'après la question 2.$(a)$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{sh}(2x) = \mathrm{sh}(x+x) = \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(x) + \mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(x)$$

d'où $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{sh}(2x) = 2\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(x).}$

3. (a) Les fonctions ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme composées de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{ch}'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

d'où $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x).}$

De même, pour tout $x \in \mathbb{R}, \mathrm{sh}'(x) = \dfrac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ d'où $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)}$.

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$ donc $\mathrm{sh}'(x) > 0$, ce qui prouve que $\boxed{\text{la fonction sh est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$

Enfin, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ donc

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} \mathrm{sh}(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\infty.}$$

De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$
donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} = +\infty.}$$

(b) On a pour tout $x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$. D'après la question précédente, sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{sh}(0) = \dfrac{e^{0}-e^{0}}{2} = 0$ donc pour tout $x \leqslant 0, \mathrm{sh}(x) \leqslant 0$ et pour tout $x \geqslant 0, \mathrm{sh}(x) \geqslant 0$.
Ainsi, pour tout $x \leqslant 0, \mathrm{ch}'(x) \leqslant 0$ et pour tout $x \geqslant 0, \mathrm{ch}'(x) \geqslant 0$.
De la même manière que pour les limites de sh, on trouve $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{ch}(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty}$.
Enfin $\mathrm{ch}(0) = \dfrac{e^{0}+e^{0}}{2} = 1$.
On a donc le tableau de variation suivant pour la fonction ch :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{ch}'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| ch | $+\infty$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

4. (a) Soit $y \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\mathrm{sh}(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} = y \Leftrightarrow e^{x}\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right) = ye^{x} \Leftrightarrow e^{2x}-1 = 2ye^{x} \Leftrightarrow e^{2x}-2ye^{x}-1 = 0.$$

Posons $X = e^{x} > 0$. On a alors $\mathrm{sh}(x) = y \Leftrightarrow X^{2} - 2yX - 1 = 0$.
Le discriminant de ce trinôme du second degré est

$$\Delta = (-2y)^{2} - 4 \times 1 \times (-1) = 4y^{2} + 4 = 4(y^{2}+1) > 0$$

donc

$$X = \frac{2y - 2\sqrt{y^{2}+1}}{2} = y - \sqrt{y^{2}+1} \quad \text{ou} \quad X = y + \sqrt{y^{2}+1}.$$

On constate que $y - \sqrt{y^{2}+1} \leqslant 0$ car $\sqrt{y^{2}+1} \geqslant \sqrt{y^{2}} = |y| \geqslant y$ et

$$y + \sqrt{y^{2}+1} > y + \sqrt{y^{2}} = y + |y| \geqslant 0$$

car $|y| \geqslant -y$ donc $y + \sqrt{y^{2}+1} > 0$.
Puisque $X > 0$, on en déduit que $X = e^{x} = y + \sqrt{y^{2}+1}$.
En appliquant le logarithme néperien, on trouve que

$$\boxed{\text{l'unique solution de } \mathrm{sh}(x) = y \text{ est } x = \ln(y + \sqrt{y^{2}+1}).}$$

(b) D'après la question précédente, tout réel $y$ admet un unique antécédent par la fonction sh et cet antécédent est $\mathrm{sh}^{-1}(y) = \ln(y + \sqrt{y^{2}+1})$. Ainsi, la fonction sh est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et $\boxed{\text{sa bijection réciproque est argsh} : x \longmapsto \ln(x + \sqrt{x^{2}+1}).}$

(c) D'après l'expression trouvée en question précédente, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}, x^{2}+1 > 0$, argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

En notant pour tout $x \in \mathbb{R}, u(x) = x + \sqrt{x^2+1}$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{argsh}'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}},$$

d'où $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \operatorname{argsh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}.}$

5. (a) Soit $y \in [1, +\infty[$. On a les équivalences suivantes :

$$\operatorname{ch}(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^x + e^{-x}}{2} = y \Leftrightarrow e^x\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right) = ye^x \Leftrightarrow e^{2x}+1 = 2ye^x \Leftrightarrow e^{2x}-2ye^x+1 = 0.$$

Posons $X = e^x > 0$. On a alors $\operatorname{ch}(x) = y \Leftrightarrow X^2 - 2yX + 1 = 0$.
Le discriminant de ce trinôme du second degré est

$$\Delta = (-2y)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 4y^2 - 4 = 4(y^2-1) \geqslant 0$$

car $y \geqslant 1$ donc $y^2 \geqslant 1$.
• Si $y = 1, \Delta = 0$ donc le trinôme admet pour unique solution $X = e^x = 1$ d'où $x = 0 = \ln(1+\sqrt{1^2-1})$.
• Si $y > 1, \Delta > 0$ donc le trinôme admet deux racines réelles distinctes. Ainsi,

$$X = \frac{2y - 2\sqrt{y^2-1}}{2} = y - \sqrt{y^2-1} \quad \text{ou} \quad X = y + \sqrt{y^2-1}.$$

Notons qu'on a bien $y + \sqrt{y^2-1} > y - \sqrt{y^2-1} > y - \sqrt{y^2} = y - y = 0$ car $y > 1$ donc $y > 0$.
Ainsi, les deux valeurs sont strictement positives et sont donc possibles pour $X = e^x$.
En appliquant le logarithme néperien, on trouve

$$x = \ln(y - \sqrt{y^2-1}) \quad \text{ou} \quad x = \ln(y+\sqrt{y^2-1}).$$

On a

$$y-\sqrt{y^2-1} = \frac{(y-\sqrt{y^2-1})(y+\sqrt{y^2-1})}{y+\sqrt{y^2-1}} = \frac{y^2-(y^2-1)}{y+\sqrt{y^2-1}} = \frac{1}{y+\sqrt{y^2-1}} < \frac{1}{y} < 1$$

car $y > 1$ donc $\ln(y - \sqrt{y^2-1}) < 0$.
D'autre part, $\ln(y+\sqrt{y^2-1}) > \ln(y) > \ln(1) = 0$ donc une seule des deux solutions possibles est positive.
On en déduit que si $y > 1$, l'unique solution positive de $\operatorname{ch}(x) = y$ est

$$x = \ln(y+\sqrt{y^2-1}).$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } y \geqslant 1, \text{ l'équation } \operatorname{ch}(x) = y \text{ admet une unique solution } x \in \mathbb{R}_+.}$

(b) D'après le tableau de variation de ch, on voit que $\operatorname{ch}(\mathbb{R}_+) \subset [1, +\infty[$. D'après la question précédente, tout réel $y \in [1, +\infty[$ admet un unique antécédent par la fonction ch dans $\mathbb{R}_+$ et cet antécédent est $\operatorname{ch}^{-1}(y) = \ln(y+\sqrt{y^2-1})$. Finalement, la fonction ch est bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$ et

$$\boxed{\text{sa bijection réciproque est } \operatorname{argch} : x \longmapsto \ln(x+\sqrt{x^2-1}).}$$

(c) On a bien pour tout $x \in [1,+\infty[, x+\sqrt{x^2-1} > 0$. D'autre part, on sait que la fonction racine n'est pas dérivable en 0 donc la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2-1}$ est dérivable en les réels $x$ tels que $x^2-1>0$, i.e. sur $]1,+\infty[$.

Ainsi, la fonction argch est dérivable sur $]1,+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables sur $]1,+\infty[$.

En notant pour tout $x \in ]1,+\infty[, u(x) = x+\sqrt{x^2-1}$, on a pour tout $x \in ]-1,+\infty[$,

$$\operatorname{argch}'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}},$$

d'où $\boxed{\text{pour tout } x \in ]1,+\infty[, \operatorname{argch}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}.}$

6. (a) En utilisant l'imparité de sh et la parité de ch, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{th}(-x) = \frac{\operatorname{sh}(-x)}{\operatorname{ch}(-x)} = \frac{-\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = -\operatorname{th}(x)$$

donc $\boxed{\text{la fonction th est impaire.}}$

(b) La fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (son dénominateur ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) \geqslant 1$) et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{th}'(x) = \frac{\operatorname{sh}'(x)\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}'(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} = \frac{\operatorname{ch}^2(x)-\operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)} > 0$$

en utilisant le résultat de la question 2.$(b)$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}, \operatorname{th}'(x) > 0$ donc $\boxed{\text{la fonction th est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$

Par ailleurs, on a

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{th}(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{e^{-x}(e^{2x}+1)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}.$$

Or, $\lim_{x\to-\infty} e^{2x}-1 = -1$ et $\lim_{x\to-\infty} e^{2x}+1 = 1$ donc par quotient, on en déduit que $\boxed{\lim_{x\to-\infty} \operatorname{th}(x) = -1.}$

Par imparité de th, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{th}(x) = \lim_{x\to-\infty} \operatorname{th}(-x) = -\lim_{x\to-\infty} \operatorname{th}(x)$$

d'où $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \operatorname{th}(x) = 1.}$

(c) Soit $y \in ]-1,1[$. On a les équivalences suivantes :

$$\operatorname{th}(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = y \Leftrightarrow \frac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{e^{-x}(e^{2x}+1)} = y \Leftrightarrow e^{2x}-1 = ye^{2x}+y \Leftrightarrow e^{2x}(1-y) = 1+y$$

d'où $e^{2x} = \dfrac{1+y}{1-y}$. Puisque $y > -1, 1+y > 0$, et puisque $y < 1, 1-y > 0$ donc on a bien $\dfrac{1+y}{1-y} > 0$. En appliquant le logarithme néperien, on obtient $2x = \ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)$ donc

$$\boxed{\text{pour tout } y \in ]-1,1], \text{l'unique solution } x \in \mathbb{R} \text{ à l'équation } \operatorname{th}(x) = y \text{ est } x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).}$$

(d) Puisque la fonction th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{th}(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{th}(x) = 1$, alors $\operatorname{th}(\mathbb{R}) \subset ]-1,1[$. D'après la question précédente, tout réel $y \in ]-1,1[$ admet un unique antécédent dans $\mathbb{R}$ par la fonction th, et cet antécédent est $\operatorname{th}^{-1}(y) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)$. Ainsi, la fonction th est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$ et

$$\boxed{\text{sa bijection réciproque est argth} : x \longmapsto \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).}$$

(e) La fonction argth est dérivable sur $]-1,1[$ comme composée de fonctions dérivables sur $]-1,1[$. En notant pour tout $x \in ]-1,1[$, $u(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$, on a pour tout $x \in ]-1,1[$,

$$\operatorname{argth}'(x) = \frac{1}{2}\times\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{1}{2}\times\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}\times\frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{2}\times\frac{2}{(1-x)^2}\frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{(1-x)(1+x)}$$

d'où $\boxed{\text{pour tout} x \in ]-1,1[, \operatorname{argth}'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}.}$