

Corrigé de la liste d'exercices n°9

Equations différentielles linéaires

Exercice 1

1. $\mathcal{S}_H = \{y : x \mapsto \lambda e^x, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

L'unique solution telle que $y(0) = 1$ est \exp .

2. On considère l'équation homogène $(H) : \forall t \in \mathbb{R}, y'(t) + 5y(t) = 0$.

Alors $\mathcal{S}_H = \{y : t \mapsto \lambda e^{-5t}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Une solution particulière de l'équation avec second membre est la fonction constante égale à $\frac{2}{5}$ donc $\mathcal{S}_E = \{y : t \mapsto \lambda e^{-5t} + \frac{2}{5}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

On a alors $y(0) = 1 \Leftrightarrow \lambda + \frac{2}{5} = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{5}$.

L'unique solution telle que $y(0) = 1$ est donc $y : t \mapsto \frac{3}{5}e^{-5t} + \frac{2}{5}$.

3. L'équation est équivalente à $(E) : \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - 3y(x) = 7$.

On considère l'équation homogène $(H) : \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - 3y(x) = 0$.

Alors $\mathcal{S}_H = \{y : x \mapsto \lambda e^{3x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Une solution particulière de (H) est la fonction constante égale à $-\frac{7}{3}$ donc

$$\mathcal{S}_E = \left\{ y : x \mapsto \lambda e^{3x} - \frac{7}{3}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

On a alors $y(0) = 1 \Leftrightarrow \lambda - \frac{7}{3} = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{10}{3}$ donc l'unique solution telle que $y(0) = 1$ est $y : x \mapsto \frac{10}{3}e^{3x} - \frac{7}{3}$.

Exercice 2

1. • $(H) : \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - 2y(x) = 0$.

$$\mathcal{S}_H = \{y : x \mapsto \lambda e^{2x}, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

• Méthode de variation de la constante : on cherche une solution particulière sous la forme $y(x) = \lambda(x)e^{2x}$ où λ est une fonction dérivable sur \mathbb{R} .

On a les équivalences :

$$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - 2y(x) = (x-1)e^{2x} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x)e^{2x} + 2\lambda(x)e^{2x} - 2\lambda(x)e^{2x} = (x-1)e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x) = x-1$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \lambda(x) = \frac{x^2}{2} - x + c$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = ce^{2x} + \left(\frac{x^2}{2} - x\right)e^{2x}$$

donc $\mathcal{S}_E = \left\{ y : x \mapsto \lambda e^{2x} + \left(\frac{x^2}{2} - x\right)e^{2x}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

2. • $(H) : \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - y(x) = 0$.

$$\mathcal{S}_H = \{y : x \mapsto \lambda e^x, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

• Méthode de variation de la constante : on cherche une solution particulière sous la forme $y(x) = \lambda(x)e^x$ où λ est une fonction dérivable sur \mathbb{R} .

On a les équivalences :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - y(x) = \cos(2x)e^x &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x)e^x + \lambda(x)e^x - \lambda(x)e^x = \cos(2x)e^x \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x) = \cos(2x) \\ &\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \lambda(x) = \frac{\sin(2x)}{2} + c \\ &\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = ce^x + \frac{\sin(2x)}{2}e^x \end{aligned}$$

donc $\mathcal{S}_E = \left\{ y : x \mapsto \lambda e^x + \frac{\sin(2x)}{2}e^x, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

3. • (H) : $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + xy(x) = 0$.

On a $\mathcal{S}_H = \{y : x \mapsto \lambda e^{-\frac{x^2}{2}}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

• On remarque facilement que la fonction $y : x \mapsto x$ est solution particulière de (E) donc $\mathcal{S}_E = \{y : x \mapsto \lambda e^{-\frac{x^2}{2}} + x, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

4. On a (E) : $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - \frac{2x}{1+x^2}y(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

• Soit (H) : $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - \frac{2x}{1+x^2}y(x) = 0$.

On a $\mathcal{S}_H = \{y : x \mapsto \lambda e^{\ln(1+x^2)}, \lambda \in \mathbb{R}\} = \{y : x \mapsto \lambda(1+x^2), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

• On remarque facilement que la fonction constante égale à $-\frac{1}{2}$ est solution particulière de (E) donc $\mathcal{S}_E = \{y : x \mapsto \lambda(1+x^2) - \frac{1}{2}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

5. On a (E) : $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + \frac{2}{3}y(x) = \frac{x + e^{2x}}{3}$.

• Soit (H) : $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + \frac{2}{3}y(x) = 0$.

Alors $\mathcal{S}_H = \{y : x \mapsto \lambda e^{-\frac{2}{3}x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

• Méthode de variation de la constante : on cherche une solution particulière sous la forme $y(x) = \lambda(x)e^{-\frac{2}{3}x}$ où λ est une fonction dérivable sur \mathbb{R} .

On a les équivalences :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + \frac{2}{3}y(x) = \frac{x + e^{2x}}{3} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x)e^{-\frac{2}{3}x} - \frac{2}{3}\lambda(x)e^{-\frac{2}{3}x} + \frac{2}{3}\lambda(x)e^{-\frac{2}{3}x} = \frac{x + e^{2x}}{3} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x) = \frac{1}{3}(xe^{\frac{2}{3}x} + e^{\frac{8}{3}x}). \end{aligned}$$

Cherchons une primitive de $x \mapsto xe^{\frac{2}{3}x}$ en réalisant une intégration par parties.

On a

$$\int_0^x te^{\frac{2}{3}t} dt = \left[\frac{3}{2}te^{\frac{2}{3}t} \right]_0^x - \int_0^x \frac{3}{2}e^{\frac{2}{3}t} dt = \frac{3}{2}xe^{\frac{2}{3}x} - \left[\frac{9}{4}e^{\frac{2}{3}t} \right]_0^x = \frac{3}{2}xe^{\frac{2}{3}x} - \frac{9}{4}e^{\frac{2}{3}x} + \frac{9}{4}$$

On peut donc choisir comme primitive de $x \mapsto \frac{1}{3}(xe^{\frac{2}{3}x} + e^{\frac{8}{3}x})$ la fonction

$$\lambda : x \mapsto \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2}xe^{\frac{2}{3}x} - \frac{9}{4}e^{\frac{2}{3}x} + \frac{3}{8}e^{\frac{8}{3}x} \right) = \frac{1}{2}xe^{\frac{2}{3}x} - \frac{3}{4}e^{\frac{2}{3}x} + \frac{1}{8}e^{\frac{8}{3}x}$$

donc une solution particulière est

$$y(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{8}e^{2x}.$$

Finalement, l'ensemble des solutions de (E) est

$$\mathcal{S}_E = \left\{ y : x \mapsto \lambda e^{-\frac{2}{3}x} + \frac{x}{2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{8}e^{2x}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

6. • Soit $(H) : \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + y(x) = 0$.

Alors $\mathcal{S}_H = \{y : x \mapsto \lambda e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

• Méthode de variation de la constante : on cherche une solution particulière de la forme $y(x) = \lambda(x)e^{-x}$ où λ est une fonction dérivable sur \mathbb{R} .

On a les équivalences :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + y(x) = \frac{1}{1+e^x} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x)e^{-x} - \lambda(x)e^{-x} + \lambda(x)e^{-x} = \frac{1}{1+e^x} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} \\ &\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \lambda(x) = \ln(1+e^x) + c \\ &\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \ln(1+e^x)e^{-x} + ce^{-x}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{S}_E = \{y : x \mapsto \lambda e^{-x} + \ln(1+e^x)e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

7. On remarque que si pour tout réel x , $3xy'(x) - 4y(x) = x$, alors $y(0) = 0$.

• Commençons par résoudre (E) sur \mathbb{R}_+^* .

L'équation homogène est $(H) : \forall x \in \mathbb{R}_+^*, y'(x) - \frac{4}{3x}y(x) = 0$ qui admet comme ensemble de solutions $\mathcal{S}_H = \{y : x \mapsto \lambda e^{\frac{4}{3}\ln(x)}, \lambda \in \mathbb{R}\} = \{y : x \mapsto \lambda x^{\frac{4}{3}}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

On remarque que $x \mapsto -x$ est une solution particulière de (E) sur \mathbb{R}_+^* donc l'ensemble des solutions de (E) sur \mathbb{R}_+^* est $\mathcal{S}_E = \{y : x \mapsto \lambda x^{\frac{4}{3}} - x, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

• Résolvons maintenant (E) sur \mathbb{R}_-^* .

L'équation homogène est $(H) : \forall x \in \mathbb{R}_-^*, y'(x) - \frac{4}{3x}y(x) = 0$ qui admet comme ensemble de solutions $\mathcal{S}_H = \{y : x \mapsto \mu e^{\frac{4}{3}\ln(-x)}, \mu \in \mathbb{R}\} = \{y : x \mapsto \mu x^{\frac{4}{3}}, \mu \in \mathbb{R}\}$.

On remarque que $x \mapsto -x$ est une solution particulière de (E) sur \mathbb{R}_-^* donc l'ensemble des solutions de (E) sur \mathbb{R}_-^* est $\mathcal{S}_E = \{y : x \mapsto \mu x^{\frac{4}{3}} - x, \mu \in \mathbb{R}\}$.

Finalement, y est solution de (E) sur \mathbb{R} et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0) = 0 \\ \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x > 0, y(x) = \lambda x^{\frac{4}{3}} - x \\ \exists \mu \in \mathbb{R}, \forall x < 0, y(x) = \mu x^{\frac{4}{3}} - x \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \geq 0, y(x) = \lambda x^{\frac{4}{3}} - x \\ \exists \mu \in \mathbb{R}, \forall x < 0, y(x) = \mu x^{\frac{4}{3}} - x \end{array} \right.$$

8. • Soit $(H) : \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + \sin(x)y(x) = 0$.

Alors $\mathcal{S}_H = \{y : x \mapsto \lambda e^{\cos(x)}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

• On remarque que la fonction constante égale à 2 est une solution particulière de (E) donc $\mathcal{S}_E = \{y : x \mapsto \lambda e^{\cos(x)} + 2, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

9. On a $\mathcal{S}_H = \{y : x \mapsto \lambda e^{-e^x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

10. • Soit $(H) : \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - y(x) = 0$.

Alors $\mathcal{S}_H = \{y : x \mapsto \lambda e^x, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

• Méthode de variation de la constante : on cherche une solution particulière de (E) sous la forme $y(x) = \lambda(x)e^x$ où λ est une fonction dérivable sur \mathbb{R} .

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - y(x) = x^2(e^x + e^{-x}) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x)e^x + \lambda(x)e^x - \lambda(x)e^x = x^2(e^x + e^{-x}) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x) = x^2 + x^2e^{-2x}. \end{aligned}$$

Cherchons une primitive de $x \mapsto x^2 e^{-2x}$ sous la forme $z(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-2x}$.

On a

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, z'(x) = x^2 e^{-2x} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (2ax + b - 2ax^2 - 2bx - 2c)e^{-2x} = x^2 e^{-2x} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, -2ax^2 + (2a - 2b)x + b - 2c = x^2 \end{aligned}$$

d'où par identification :

$$\begin{cases} -2a &= 1 \\ 2a - 2b &= 0 \\ b - 2c &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= -\frac{1}{2} \\ b &= -\frac{1}{2} \\ c &= -\frac{1}{4} \end{cases}$$

donc finalement, on peut poser pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda(x) = \frac{x^3}{3} + (-\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4})e^{-2x}$ d'où

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = \frac{x^3}{3}e^x + (-\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4})e^{-x}$.

Finalement, $\mathcal{S}_E = \{y : x \mapsto \lambda e^x + \frac{x^3}{3}e^x + (-\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4})e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

11. • Soit $(H) : \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + 2y(x) = 0$.

Alors $\mathcal{S}_H = \{y : x \mapsto \lambda e^{-2x}\}$.

• Cherchons une solution particulière de (E) sous la forme $y(x) = ax^2 + bx + c$. On a

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + 2y(x) = x^2 - 2x + 3 &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 2ax + b + 2ax^2 + 2bx + 2c = x^2 - 2x + 3 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 2ax^2 + (2a + 2b)x + b + 2c = x^2 - 2x + 3. \end{aligned}$$

Par identification, on obtient

$$\begin{cases} 2a &= 1 \\ 2a + 2b &= -2 \\ b + 2c &= 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= \frac{1}{2} \\ b &= -\frac{3}{2} \\ c &= \frac{9}{4}. \end{cases}$$

Finalement, $\mathcal{S}_E = \{y : x \mapsto \lambda e^{-2x} + \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}\}$.

12. • Soit $(H) : \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $y'(x) + \tan(x)y(x) = 0$.

Alors $\mathcal{S}_H = \{y : x \mapsto \lambda e^{\ln(|\cos(x)|)}, \lambda \in \mathbb{R}\} = \{y : x \mapsto \lambda \cos(x), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

• Méthode de variation de la constante : on cherche une solution particulière de (E) sous la forme $y(x) = \lambda(x) \cos(x)$ où λ est une fonction dérivable sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

On a les équivalences :

$$\begin{aligned} \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$
, $y'(x) + \tan(x)y(x) &= \sin(2x) + \cos(x) \\ \Leftrightarrow \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\lambda'(x) \cos(x) - \lambda(x) \sin(x) + \tan(x) \cos(x) \lambda(x) &= \sin(2x) + \cos(x) \\ \Leftrightarrow \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\lambda'(x) = \frac{\sin(2x)}{\cos(x)} + 1 & \\ \Leftrightarrow \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\lambda'(x) = 2 \sin(x) + 1 & \\ \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\lambda(x) = -2 \cos(x) + x + c & \\ \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $y(x) = c \cos(x) + x \cos(x) - 2 \cos^2(x). & \end{aligned}$

Finalement, $\mathcal{S}_E = \{y : x \mapsto \lambda \cos(x) + x \cos(x) - 2 \cos^2(x), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 3

Procédons par analyse-synthèse.

• **Analyse** : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que pour tout réel x , $f'(x) + f(x) = f(0) + f(1)$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -f(x) + f(0) + f(1)$ donc f' est dérivable sur \mathbb{R} comme somme de fonctions dérivables sur \mathbb{R} et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = -f'(x)$ d'où pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) + f'(x) = 0$.

Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \lambda e^{-x}$ donc en primitivant, on obtient l'existence de deux réels $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout réel x , $f(x) = \mu - \lambda e^{-x}$.

Ainsi, $f(0) = \mu - \lambda$ et $f(1) = \mu - \lambda e^{-1}$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(x) = f(0) + f(1) \Leftrightarrow \mu = 2\mu - \lambda(1 + e^{-1}) \Leftrightarrow \mu = \lambda(1 + e^{-1})$$

d'où pour tout réel x , $f(x) = \lambda(1 + e^{-1} - e^{-x})$.

• **Synthèse** : Supposons qu'il existe un réel λ tel que pour tout réel x , $f(x) = \lambda(1 + e^{-1} - e^{-x})$.

On a alors pour tout réel x , $f'(x) = \lambda e^{-x}$.

Ainsi, pour tout réel x , $f(x) + f'(x) = \lambda(1 + e^{-1})$.

Or, $f(0) + f(1) = \lambda(1 + e^{-1} - 1 + 1 + e^{-1} - e^{-1}) = \lambda(1 + e^{-1})$.

On a donc bien pour tout réel x , $f(x) + f'(x) = f(0) + f(1)$.

Finalement, l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que pour tout réel x , $f'(x) + f(x) = f(0) + f(1)$ sont les fonctions $\{f : x \mapsto \lambda(1 + e^{-1} - e^{-x}), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 4

- Résolvons (E) sur $]0, +\infty[$.

On considère alors l'équation $(E') : \forall x > 0, y'(x) + (1 - \frac{2}{x})y(x) = x^2$.

Soit $(H') : \forall x > 0, y'(x) + (1 - \frac{2}{x})y(x) = 0$.

Alors $\mathcal{S}_{H'} = \{y : x \mapsto \lambda e^{-x+2\ln(x)}, \lambda \in \mathbb{R}\} = \{y : x \mapsto \lambda x^2 e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

On remarque que $x \mapsto x^2$ est une solution particulière de (E') sur \mathbb{R}_+^* donc

$$\mathcal{S}_{E'} = \{y : x \mapsto \lambda x^2 e^{-x} + x^2, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

- Résolvons (E) sur $] -\infty, 0[$.

On considère alors l'équation $(E'') : \forall x < 0, y'(x) + (\frac{2}{x} - 1)y(x) = -x^2$.

Soit $(H'') : \forall x < 0, y'(x) + (\frac{2}{x} - 1)y(x) = 0$.

Alors $\mathcal{S}_{H''} = \{y : x \mapsto \mu e^{x-2\ln(x)}, \mu \in \mathbb{R}\} = \{y : x \mapsto \mu \frac{e^x}{x^2}, \mu \in \mathbb{R}\}$.

On cherche une solution particulière de (E'') sur \mathbb{R}_-^* sous la forme $y(x) = \lambda(x) \frac{e^x}{x^2}$ où $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur \mathbb{R}_-^* .

On a alors les équivalences

$$\begin{aligned} \forall x < 0, y'(x) + \left(\frac{2}{x} - 1\right)y(x) &= -x^2 \\ \Leftrightarrow \forall x < 0, \lambda'(x) \frac{e^x}{x^2} + \lambda(x) \frac{e^x}{x^2} - 2\lambda(x) \frac{e^x}{x^3} + 2\lambda(x) \frac{e^x}{x^3} - \lambda(x) \frac{e^x}{x^2} &= -x^2 \\ \Leftrightarrow \forall x < 0, \lambda'(x) &= -x^4 e^{-x}. \end{aligned}$$

On cherche une primitive λ sous la forme $\lambda(x) = (ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + t)e^{-x}$ où $(a, b, c, d, t) \in \mathbb{R}^5$.

On a alors les équivalences

$$\begin{aligned} \forall x < 0, \lambda'(x) &= -x^4 e^{-x} \\ \Leftrightarrow \forall x < 0, (4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d - ax^4 - bx^3 - cx^2 - dx - t)e^{-x} &= -x^4 e^{-x} \\ \Leftrightarrow \forall x < 0, -ax^4 + (4a - b)x^3 + (3b - c)x^2 + (2c - d)x + d - t &= -x^4 \end{aligned}$$

d'où par identification

$$\begin{cases} -a = -1 \\ 4a - b = 0 \\ 3b - c = 0 \\ 2c - d = 0 \\ d - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 12 \\ d = 24 \\ t = 24 \end{cases}$$

donc on peut considérer $\forall x < 0, \lambda(x) = (x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 24x + 24)e^{-x}$.

Ainsi, pour tout $x < 0, y(x) = x^2 + 4x + 12 + \frac{24}{x} + \frac{24}{x^2}$.

Finalement, $\mathcal{S}_{E''} = \{y : x \mapsto \mu \frac{e^x}{x^2} + x^2 + 4x + 12 + \frac{24}{x} + \frac{24}{x^2}, \mu \in \mathbb{R}\}$.

2. Soit y dérivable sur \mathbb{R} . On a les équivalences suivantes :

$$y \text{ est solution de } (E) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x > 0, y(x) = \lambda x^2 e^{-x} + x^2 \\ y(0) = 0 \\ \exists \mu \in \mathbb{R}, \forall x < 0, y(x) = \mu \frac{e^x}{x^2} + x^2 + 4x + 12 + \frac{24}{x} + \frac{24}{x^2} \end{cases}$$

Puisque y est dérivable sur \mathbb{R} , a fortiori y est continue sur \mathbb{R} , donc en 0. On doit donc avoir $\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = y(0) = 0$.

On a bien $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = 0$.

Cherchons $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = 0$.

Faisons un développement limité de y en 0.

On a

$$\begin{aligned} y(x) &= \mu \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} + x^2 + 4x + 12 + \frac{24}{x} + \frac{24}{x^2} \\ &= \frac{\mu + 24}{x^2} + \frac{\mu + 24}{x} + \frac{\mu + 24}{2} + o(1) + 4x + x^2 \\ &= \frac{\mu + 24}{x^2} + \frac{\mu + 24}{x} + \frac{\mu + 24}{2} + o(1). \end{aligned}$$

Ainsi, on a $\lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = 0$ si et seulement si $\mu = -24$.

Les solutions de (E) sur \mathbb{R} sont donc les fonctions y telles que

$$\begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \geq 0, y(x) = \lambda x^2 e^{-x} + x^2 \\ \forall x < 0, y(x) = -24 \frac{e^x}{x^2} + x^2 + 4x + 12 + \frac{24}{x} + \frac{24}{x^2} \end{cases}$$

Exercice 5

1. On a pour équation caractéristique $(EC) : r^2 + 8r + 15 = 0 \Leftrightarrow (r + 3)(r + 5) = 0$.

Ainsi, $\mathcal{S}_H = \{y : t \mapsto \lambda e^{-3t} + \mu e^{-5t}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

2. • Soit $(H) : \forall t \in \mathbb{R}, y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) = 0$.

L'équation caractéristique associée est $(EC) : r^2 - 6r + 9 = 0$ dont le discriminant est nul. On a donc une racine double $r = 3$ donc $\mathcal{S}_H = \{y : t \mapsto (\lambda + \mu t)e^{3t}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

• On remarque que la fonction constante égale à $\frac{1}{3}$ est une solution particulière de $(E) : \forall t \in \mathbb{R}, y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) = 3$, donc finalement l'ensemble des solutions de (E) est $\mathcal{S}_E = \{y : t \mapsto (\lambda + \mu t)e^{3t} + \frac{1}{3}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

3. On a

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, y''(x) = 2y'(x) &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) = \lambda e^{2x} \\ &\Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \lambda e^{2x} + \mu. \end{aligned}$$

4. • Soit $(H) : \forall x \in \mathbb{R}, y''(x) - 4y(x) = 0$.

L'équation caractéristique est $(EC) : r^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (r + 2)(r - 2) = 0$ donc

$$\mathcal{S}_H = \{y : x \mapsto \lambda e^{2x} + \mu e^{-2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

• On cherche une solution particulière de la forme $y : x \mapsto e^x (a \cos(x) + b \sin(x))$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$y'(x) = e^x (a \cos(x) + b \sin(x) - a \sin(x) + b \cos(x)) = e^x ((a + b) \cos(x) + (b - a) \sin(x))$$

et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} y''(x) &= e^x ((a + b) \cos(x) + (b - a) \sin(x) - (a + b) \sin(x) + (b - a) \cos(x)) \\ &= e^x (2b \cos(x) - 2a \sin(x)). \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, y''(x) - 4y(x) &= e^x \cos(x) \\ \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, e^x ((2b - 4a) \cos(x) + (-2a - 4b) \sin(x)) &= e^x \cos(x) \\ \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (2b - 4a) \cos(x) + (-2a - 4b) \sin(x) &= \cos(x). \end{aligned}$$

Pour $x = \frac{\pi}{2}$, on trouve $-2a - 4b = 0$ d'où $a = -2b$.

Pour $x = 0$, on trouve $2b - 4a = 1$ d'où $10b = 1$, i.e. $b = \frac{1}{10}$ et $a = -\frac{1}{5}$.

Une solution particulière est donc $y : x \mapsto e^x (-\frac{1}{5} \cos(x) + \frac{1}{10} \sin(x))$.

Finalement, $\mathcal{S}_E = \{y : x \mapsto \lambda e^{2x} + \mu e^{-2x} + e^x (-\frac{1}{5} \cos(x) + \frac{1}{10} \sin(x)), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

5. $(H) : \forall x \in \mathbb{R}, y''(x) - 4y'(x) = 0$.

On a pour équation caractéristique $(EC) : r^2 - 4r = 0 \Leftrightarrow r(r - 4) = 0$ donc

$$\mathcal{S}_H = \{y : x \mapsto \lambda e^{4x} + \mu, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Cherchons une solution particulière de (E) sous la forme $y(x) = ax^2 + bx$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}, y'(x) = 2ax + b$ et $y''(x) = 2a$ donc

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, y''(x) - 4y'(x) = 8x - 16 &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 2a - 4(2ax + b) = 8x - 16 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, -8ax + 2a - 4b = 8x - 16 \end{aligned}$$

Par identification, on obtient

$$\begin{cases} -8a &= 8 \\ 2a - 4b &= -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= -1 \\ b &= \frac{7}{2} \end{cases}$$

On a donc pour solution particulière $y(x) = -x^2 + \frac{7}{2}x$.

Finalement, $\mathcal{S}_E = \{y : x \mapsto \lambda e^{4x} + \mu - x^2 + \frac{7}{2}x, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

6. Soit $(H) : \forall x \in \mathbb{R}, y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = 0$.

On considère l'équation caractéristique $(EC) : r^2 + 2r + 2 = 0$.

Cette équation a pour discriminant $\Delta = 4 - 4 \times 2 = -4 < 0$ donc les racines sont $r_1 = \frac{-2 - 2i}{2} = -1 - i$ et $r_2 = -1 + i$.

Les solutions de (H) sont donc $\mathcal{S}_H = \{y : x \mapsto e^{-x}(\lambda \cos(x) + \mu \sin(x)), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

Cherchons une solution particulière de (E) sous la forme $y(x) = (ax + b)e^x$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}, y'(x) = e^x(ax + a + b)$ et $y''(x) = e^x(ax + 2a + b)$.

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = 3xe^x &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, e^x(5ax + 4a + 5b) = 3xe^x \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 5ax + 4a + 5b = 3x. \end{aligned}$$

Par identification, on obtient

$$\begin{cases} 5a &= 3 \\ 4a + 5b &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= \frac{3}{5} \\ b &= -\frac{4a}{5} = -\frac{12}{25} \end{cases}$$

Ainsi, la fonction $y : x \mapsto (\frac{3}{5}x - \frac{12}{25})e^x$ est une solution particulière de (E) donc

$$\mathcal{S}_E = \{y : x \mapsto e^{-x}(\lambda \cos(x) + \mu \sin(x)) + \left(\frac{3}{5}x - \frac{12}{25}\right)e^x, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

7. Posons pour tout $x \in \mathbb{R}, z(x) = y'(x)$.

Alors $(E) \Leftrightarrow (E') : \forall x \in \mathbb{R}, z'(x) + \frac{2x}{1+x^2}z(x) = \frac{2}{1+x^2}$.

Soit $(H) : \forall x \in \mathbb{R}, z'(x) + \frac{2x}{1+x^2}z(x) = 0$.

Alors $\mathcal{S}_H = \{z : x \mapsto \lambda e^{-\ln(1+x^2)}, \lambda \in \mathbb{R}\} = \left\{z : x \mapsto \frac{\lambda}{1+x^2}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

Cherchons une solution particulière de (E') grâce à la méthode de variation de la constante, i.e. sous la forme $z(x) = \frac{\lambda(x)}{1+x^2}$ où λ est une fonction dérivable sur \mathbb{R} .

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, z'(x) + \frac{2x}{1+x^2}z(x) &= \frac{2}{1+x^2} \\ \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \frac{\lambda'(x)}{1+x^2} - \lambda(x) \frac{2x}{(1+x^2)^2} + \frac{2x}{(1+x^2)^2}z(x) &= \frac{2}{1+x^2} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x) = 2 \\ &\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \lambda(x) = 2x + c \\ &\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, z(x) = \frac{2x}{1+x^2} + \frac{c}{1+x^2} \end{aligned}$$

donc $\mathcal{S}_{E'} = \left\{z : x \mapsto \frac{\lambda}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

Or, y est solution de (E) si et seulement si y' est solution de (E') donc y est solution de (E) si et seulement si

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) = \frac{\lambda}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2} \Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, y(x) = \lambda \arctan(x) + \ln(1+x^2) + \mu.$$

Finalement, $\mathcal{S}_E = \{y : x \mapsto \lambda \arctan(x) + \ln(1+x^2) + \mu, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

Exercice 6

Raisonnons par analyse-synthèse.

• **Analyse** : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(2 - x)$.

Puisque la fonction $x \mapsto f(2 - x)$ est dérivable sur \mathbb{R} comme composée de fonctions dérivables sur \mathbb{R} , on en déduit que f' est dérivable sur \mathbb{R} et on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = -f'(2 - x) = -f(2 - (2 - x)) = -f(x),$$

d'où pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) + f(x) = 0$.

L'équation caractéristique associée à cette équation linéaire homogène d'ordre deux à coefficients constants est $r^2 + 1 = 0$ dont les racines sont i et $-i$.

On en déduit qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout réel x , $f(x) = \lambda \cos(x) + \mu \sin(x)$.

Il en découle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \mu \cos(x) - \lambda \sin(x)$.

On a alors l'équivalence

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(2 - x) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \mu \cos(x) - \lambda \sin(x) = \lambda \cos(2 - x) + \mu \sin(2 - x).$$

Pour $x = 0$, on obtient $\mu = \lambda \cos(2) + \mu \sin(2)$ d'où $\mu = \frac{\lambda \cos(2)}{1 - \sin(2)}$ (on a bien $\sin(2) \neq 1$).

Pour $x = 2$, on obtient $\mu \cos(2) - \lambda \sin(2) = \lambda$ d'où $\lambda = \frac{\mu \cos(2)}{1 + \sin(2)}$ (on a bien $\sin(2) \neq -1$).

Or, si $\mu = \frac{\lambda \cos(2)}{1 - \sin(2)}$, on a bien $\frac{\mu \cos(2)}{1 + \sin(2)} = \frac{\lambda \cos^2(2)}{1 - \sin^2(2)} = \lambda$, ce qui signifie qu'on ne pourra pas déterminer λ de façon unique.

On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda \left(\cos(x) + \frac{\cos(2)}{1 - \sin(2)} \sin(x) \right)$.

• **Synthèse** : Supposons qu'il existe un réel λ tel que pour tout réel x , $f(x) = \lambda \left(\cos(x) + \frac{\cos(2)}{1 - \sin(2)} \sin(x) \right)$.

On a alors pour tout réel x , $f'(x) = \lambda \left(-\sin(x) + \frac{\cos(2)}{1 - \sin(2)} \cos(x) \right)$.

Par ailleurs, pour tout réel x , on a

$$\begin{aligned} f(2 - x) &= \lambda \left(\cos(2 - x) + \frac{\cos(2)}{1 - \sin(2)} \sin(2 - x) \right) \\ &= \lambda \left(\cos(2) \cos(x) + \sin(2) \sin(x) + \frac{\cos(2)}{1 - \sin(2)} (\sin(2) \cos(x) - \cos(2) \sin(x)) \right) \\ &= \frac{\lambda}{1 - \sin(2)} \left((\cos(2) - \cos(2) \sin(2) + \cos(2) \sin(2)) \cos(x) + (\sin(2) - \sin^2(2) - \cos^2(2)) \sin(x) \right) \\ &= \frac{\lambda}{1 - \sin(2)} (\cos(2) \cos(x) + (\sin(2) - 1) \sin(x)) \\ &= \lambda \left(-\sin(x) + \frac{\cos(2)}{1 - \sin(2)} \cos(x) \right) \\ &= f'(x). \end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(2 - x)$ est

$$\left\{ f : x \mapsto \lambda \left(\cos(x) + \frac{\cos(2)}{1 - \sin(2)} \sin(x) \right), \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 7

D'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f sur \mathbb{R} s'annulant en 0. Autrement dit, F est dérivable sur \mathbb{R} et on a pour tout

$x \in \mathbb{R}, F'(x) = f(x)$ et $F(0) = 0$.

L'équation qu'on doit résoudre s'écrit alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, 3F(x) = 2xF'(x) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^*, F'(x) - \frac{3}{2x}F(x) = 0 \text{ et } F(0) = 0.$$

Il existe donc deux réels λ et μ tels que pour tout $x > 0, F(x) = \lambda e^{\frac{3}{2} \ln(x)} = \lambda x^{\frac{3}{2}}$ et pour tout $x < 0, F(x) = \mu e^{\frac{3}{2} \ln(-x)} = \mu (-x)^{\frac{3}{2}}$.

On a bien $0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} F(x)$.

On en déduit que pour tout $x > 0, f(x) = F'(x) = \frac{3}{2} \lambda \sqrt{x}$ et pour tout $x < 0, f(x) = F'(x) = -\frac{3}{2} \mu \sqrt{-x}$.

On a bien dans ce cas $0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

Finalement, les fonctions continues sur \mathbb{R} telles qu'on ait pour tout réel $x, 3 \int_0^x f(t) dt = 2xf(x)$ sont les fonctions f telles que

$$\begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \geq 0, f(x) = \frac{3}{2} \lambda \sqrt{x} \\ \exists \mu \in \mathbb{R}, \forall x < 0, f(x) = -\frac{3}{2} \mu \sqrt{-x}. \end{cases}$$

Exercice 8

1. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 1 = 0$ dont les racines sont -1 et 1 donc les solutions sont

$$\{z : t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{-t}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

2. Posons pour tout réel $t, z(t) = y''(t) - y(t)$.

On a pour tout réel $t, z''(t) = y^{(4)}(t) - y''(t)$.

On obtient l'équivalence :

$$\forall t \in \mathbb{R}, y^{(4)}(t) - 2y''(t) + y(t) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, z''(t) - z(t) = 0.$$

D'après la première question, ceci équivaut à l'existence de deux réels λ et μ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, y''(t) - y(t) = z(t) = \lambda e^t + \mu e^{-t}. \quad (E)$$

- Considérons l'équation homogène associée

$$\forall t \in \mathbb{R}, y''(t) - y(t) = 0. \quad (H)$$

D'après la première question, $\mathcal{S}_H = \{y : t \mapsto \alpha e^t + \beta e^{-t}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$.

- Cherchons une solution particulière à l'équation

$$\forall t \in \mathbb{R}, y''(t) - y(t) = \lambda e^t \quad (E_1)$$

sous la forme $y(t) = ate^t$ où $a \in \mathbb{R}$.

On a pour tout réel $t, y'(t) = e^t(at + a)$ et $y''(t) = e^t(at + 2a)$.

On a donc l'équivalence :

$$\forall t \in \mathbb{R}, y''(t) - y(t) = \lambda e^t \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, 2ae^t = \lambda e^t.$$

Pour $t = 0$, on obtient $2a = \lambda$ d'où $a = \frac{\lambda}{2}$, i.e. pour tout réel t , $y(t) = \frac{\lambda t}{2}e^t$ est une solution particulière de (E_1) .

• Cherchons une solution particulière à l'équation

$$\forall t \in \mathbb{R}, y''(t) - y(t) = \mu e^{-t} \quad (E_2)$$

sous la forme $y(t) = bte^{-t}$ où $b \in \mathbb{R}$.

On a pour tout réel t , $y'(t) = e^{-t}(-bt + b)$ et $y''(t) = e^{-t}(bt - b - b) = (bt - 2b)e^{-t}$.

On a donc l'équivalence :

$$\forall t \in \mathbb{R}, y''(t) - y(t) = \mu e^{-t} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, -2be^{-t} = \mu e^{-t}.$$

Pour $t = 0$, on obtient $-2b = \mu$ d'où $b = -\frac{\mu}{2}$, i.e. pour tout réel t , $y(t) = -\frac{\mu t}{2}e^{-t}$ est une solution particulière de (E_2) .

Par principe de superposition, la fonction $t \mapsto \frac{\lambda t}{2}e^t - \frac{\mu t}{2}e^{-t}$ est une solution particulière de (E) .

Finalement, l'ensemble des solutions de (E) , et donc par équivalence, de l'équation de départ, est

$$\left\{ y : t \mapsto \alpha e^t + \beta e^{-t} + \frac{\lambda t}{2}e^t - \frac{\mu t}{2}e^{-t}, (\alpha, \beta, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

Exercice 9

1. Supposons que f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} . Alors g l'est également et on a pour tout réel x , $f(x) = g(x)(1 + e^x)$ d'où $f'(x) = g'(x)(1 + e^x) + g(x)e^x$ et

$$f''(x) = g''(x)(1 + e^x) + g'(x)e^x + g'(x)e^x + g(x)e^x = g''(x)(1 + e^x) + 2g'(x)e^x + g(x)e^x.$$

On a alors les équivalences

$$\begin{aligned} & \forall x \in \mathbb{R}, (1 + e^x)^2 f''(x) - 2e^x(1 + e^x)f'(x) - (3e^x + 1)f(x) = 0 \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, (1 + e^x)^3 g''(x) + ((1 + e^x)e^x - 2e^{2x} - 3e^x - 1)(1 + e^x)g(x) = 0 \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, (1 + e^x)^2 g''(x) + (-e^{2x} - 2e^x - 1)g(x) = 0 \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, (1 + e^x)^2 g''(x) - (1 + e^x)^2 g(x) = 0 \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, g''(x) - g(x) = 0 \end{aligned}$$

ce qui prouve que f est solution de (E) si et seulement si g est solution de (H) .

2. $\mathcal{S}_H = \{y : x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

3. $\mathcal{S}_E = \{f : x \mapsto (\lambda e^x + \mu e^{-x})(1 + e^x), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.