
CORRIGÉ DU DEVOIR MAISON N°6

Exercice 1 : Modèle de Malthus

1. Les solutions de l'équation différentielle sont $\{N : t \mapsto \lambda e^{rt}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Puisque $\lambda = N(0)$, avec $N(0)$ l'effectif de la population au temps $t = 0$, on a nécessairement $\lambda = N(0) \geq 0$.

Ainsi, pour tout $t \geq 0$, $N(t) = N(0)e^{rt}$ avec $N(0) \geq 0$.

- Si $N(0) = 0$, la fonction N est identiquement nulle.

On suppose dorénavant que $N(0) > 0$.

- Si $r = 0$, la fonction N est constante égale à $N(0)$.

- Si $r > 0$, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = +\infty$. Si le taux d'accroissement est strictement positif, la population ne va cesser d'augmenter sans atteindre de limite finie.

- Si $r < 0$, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = 0$. Si le taux d'accroissement est strictement négatif, la population va s'éteindre.

2. Il faut résoudre l'équation différentielle $N'(t) = \cos(t)N(t)$, i.e. $N'(t) - \cos(t)N(t) = 0$.

Une primitive de $t \mapsto -\cos(t)$ est $t \mapsto -\sin(t)$ donc les solutions de l'équation différentielle sont

$$\{N : t \mapsto \lambda e^{\sin(t)}, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

On a comme dans la question précédente, $N(0) = \lambda e^{\sin(0)} = \lambda e^0 = \lambda$ donc pour tout $t \geq 0$, $N(t) = N(0)e^{\sin(t)}$.

On a pour tout $t \geq 0$, $-1 \leq \sin(t) \leq 1$ donc par croissance de la fonction exponentielle, pour tout $t \geq 0$, $e^{-1} \leq e^{\sin(t)} \leq e$ donc, puisque $N(0) \geq 0$, pour tout $t \geq 0$,

$$N(0)e^{-1} \leq N(t) \leq N(0)e.$$

Si $N(0) > 0$, alors pour tout $t \geq 0$, $N(t) \geq N(0)e^{-1} > 0$ donc la population ne risque pas l'extinction.

3. Il faut résoudre l'équation différentielle $(E) : N'(t) - rN(t) = m$ avec $r < 0$.

On résout d'abord l'équation homogène $(H) : N'(t) - rN(t) = 0$ dont les solutions sont $\mathcal{S}_H = \{N : t \mapsto \lambda e^{rt}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

On trouve ensuite une solution particulière à l'équation (E) . On constate que la fonction constante $t \mapsto N(t) = -\frac{m}{r}$ est solution de (E) .

D'après le théorème de structure des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, on sait que l'ensemble des solutions de (E) est

$$\mathcal{S}_E = \left\{ N : t \mapsto \lambda e^{rt} - \frac{m}{r}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

On a $N(0) = \lambda - \frac{m}{r}$ donc $\lambda = N(0) + \frac{m}{r}$.

Ainsi, pour tout $t \geq 0$, $N(t) = \left(N(0) + \frac{m}{r} \right) e^{rt} - \frac{m}{r}$.

Pour tout $t \geq 0$, $N'(t) = r \left(N(0) + \frac{m}{r} \right) e^{rt}$.

On a $r < 0$ et pour tout $t \geq 0$, $e^{rt} > 0$.

- Si $N(0) + \frac{m}{r} = 0$, la fonction N est constante égale à $-\frac{m}{r}$.
- Si $N(0) + \frac{m}{r} < 0$, i.e. $N(0) < -\frac{m}{r}$, alors pour tout $t \geq 0$, $N'(t) > 0$ donc la fonction N est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ .
- Si $N(0) + \frac{m}{r} > 0$, i.e. $N(0) > -\frac{m}{r}$, alors pour tout $t \geq 0$, $N'(t) < 0$ donc la fonction N est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+ .

Dans tous les cas, puisque $r < 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{rt} = 0$, donc

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = -\frac{m}{r}.}$$