CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ DE MATHÉMATIQUES N°3
Samedi 30 novembre 2024 (4h00)

Problème 1 : Deux modèles d'évolution d'une population de bactéries

Partie A

1. On a $(E_1) : \forall t \geqslant 0, y'(t) - ay(t) = 0$.
   D'après le cours, on sait que $\mathcal{S}_{E_1} = \{y : t \mapsto \lambda e^{at}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
   Puisque f est solution de (E_1), il existe un réel λ tel que pour tout $t \geqslant 0, f(t) = \lambda e^{at}$.
   Or, $f(0) = N_0 \Leftrightarrow \lambda = N_0$ donc $\boxed{\forall t \geqslant 0, f(t) = N_0 e^{at}.}$
2. Puisque $a > 0$, on a $\lim\limits_{t \to +\infty} at = +\infty$. Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ donc par composition de limites, on en déduit que $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{at} = +\infty$.
   Enfin, puisque $N_0 > 0$, on en déduit que $\lim\limits_{t \to +\infty} N_0 e^{at} = +\infty$ d'où $\boxed{\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = +\infty.}$
3. D'après l'énoncé, $f(T) = 2f(0) \Leftrightarrow N_0 e^{aT} = 2N_0 \overset{N_0 > 0}{\Leftrightarrow} e^{aT} = 2 \Leftrightarrow aT = \ln(2)$. Si T était nul, ceci signifierait que $\ln(2) = 0$, ce qui est absurde donc $T \neq 0$, d'où $a = \dfrac{\ln(2)}{T}$.
   On a donc pour tout $t \geqslant 0, f(t) = N_0 e^{at} = N_0 e^{\frac{t}{T}\ln(2)} = N_0 \left(e^{\ln(2)}\right)^{\frac{t}{T}}$ d'où $\boxed{\forall t \geqslant 0, f(t) = N_0 2^{\frac{t}{T}}.}$

Partie B

1. (a) On suppose que pour tout $t \geqslant 0, g(t) > 0$ et que g est solution de (E_2), i.e. pour tout $t \geqslant 0, g'(t) = a\left(1 - \dfrac{g(t)}{M}\right) g(t)$.
   Soit $y : t \mapsto \dfrac{1}{g(t)}$. Puisque g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, la fonction y est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a pour tout $t \in \mathbb{R}_+, y'(t) = -\dfrac{g'(t)}{g^2(t)}$.
   Il en découle que pour tout $t \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} y'(t) + ay(t) &= -\frac{g'(t)}{g^2(t)} + \frac{a}{g(t)} \\ &= \frac{ag(t) - g'(t)}{g^2(t)} \\ &= \frac{\frac{ag^2(t)}{M}}{g^2(t)} \quad \text{car } g \text{ est solution de } (E_2) \\ &= \frac{a}{M} \end{aligned}$$

   donc $\boxed{\dfrac{1}{g} \text{ est solution de } (E_2').}$

(b) Soit $(H) : \forall t \geqslant 0, y'(t) + ay(t) = 0$, l'équation homogène associée à (E_2').
On sait que $\mathcal{S}_H = \{y : t \mapsto \lambda e^{-at}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
Par ailleurs, la fonction constante égale à $\dfrac{1}{M}$ est clairement solution particulière de (E_2').
Ainsi, les solutions de (E_2') sur $[0, +\infty]$ sont

$$\boxed{\mathcal{S}_{E_2'} = \left\{y : t \mapsto \lambda e^{-at} + \frac{1}{M}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}}.$$

(c) Soit h une solution strictement positive de (E_2'). Posons pour tout $t \geqslant 0, g(t) = \dfrac{1}{h(t)}$ et montrons que g est solution de (E_2).
Puisque h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, la fonction g l'est également et on a pour tout $t \geqslant 0, g'(t) = -\dfrac{h'(t)}{h^2(t)}$.
Ainsi, pour tout $t \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{ah(t) - \frac{a}{M}}{h^2(t)} \quad \text{car } h \text{ est solution de } (E_2') \\ &= a\left(\frac{1}{h(t)} - \frac{1}{Mh^2(t)}\right) \\ &= a\left(g(t) - \frac{g^2(t)}{M}\right) \\ &= a\left(1 - \frac{g(t)}{M}\right) g(t) \end{aligned}$$

donc $\boxed{g = \dfrac{1}{h} \text{ est solution de } (E_2).}$

2. (a) On a pour tout $t \geqslant 0, g(t) > 0$. Posons pour tout $t \geqslant 0, h(t) = \dfrac{1}{g(t)} = \dfrac{C}{M}e^{-at} + \dfrac{1}{M}$.
En posant $\lambda = \dfrac{C}{M}$, on remarque que pour tout $t \geqslant 0, h(t) = \lambda e^{-at} + \dfrac{1}{M}$ donc d'après la question $1.b), h$ est une solution strictement positive de (E_2'), ce qui implique d'après la question précédente que $\boxed{\dfrac{1}{h} = g \text{ est solution de } (E_2).}$

(b) • Puisque $a > 0$, on a $\lim\limits_{t \to +\infty} -at = -\infty$. Or, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc par composition de limites, on en déduit que $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-at} = 0$, d'où, par somme et quotient de limites, $\boxed{\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = M.}$
• On sait déjà que pour tout $t \geqslant 0, g(t) > 0$.
On a pour tout $t \geqslant 0, Ce^{-at} > 0$ (car $C > 0$) donc $1 + Ce^{-at} > 1$ d'où $\dfrac{1}{1 + Ce^{-at}} < 1$, puis, par multiplication par $M > 0$, $\dfrac{M}{1 + Ce^{-at}} < M$, i.e.

$$\boxed{\forall t \geqslant 0, 0 < g(t) < M.}$$

(c) D'après la question $2.a), g$ est solution de (E_2) donc pour tout $t \geqslant 0, g'(t) = a\left(1 - \dfrac{g(t)}{M}\right) g(t)$.

On sait que $a > 0$ et que pour tout $t \geqslant 0, g(t) > 0$. Par ailleurs, d'après la question précédente, pour tout $t \geqslant 0, g(t) < M$ d'où $\dfrac{g(t)}{M} < 1$, i.e. $1 - \dfrac{g(t)}{M} > 0$.

Ainsi, on a bien pour tout $t \geqslant 0, g'(t) > 0$ donc $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+.}$

(d) On a

$$g(t_0) = \frac{M}{2} \Leftrightarrow \frac{M}{1 + Ce^{-at_0}} = \frac{M}{2} \Leftrightarrow e^{-at_0} = \frac{1}{C}.$$

Puisque $C > 0$, on peut prendre le logarithme néperien et il vient $-at_0 = -\ln(C)$ d'où $\boxed{t_0 = \dfrac{\ln(C)}{a}.}$ Puisque $C > 1$, on a bien $t_0 > 0$.

(e) Puisque g est solution de (E_2), on a pour tout $t \geqslant 0, g'(t) = a\left(1 - \dfrac{g(t)}{M}\right) g(t)$, où le membre de droite est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$ (car g l'est).

Ainsi, g' est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et en dérivant le membre de droite, on obtient pour tout $t \geqslant 0$:

$$g''(t) = a\left(-\frac{g'(t)}{M} g(t) + g'(t) - \frac{g'(t)}{M} g(t)\right)$$

d'où $\boxed{\forall t \geqslant 0, g''(t) = a\left(1 - \dfrac{2g(t)}{M}\right) g'(t).}$

(f) On sait que $a > 0$ et on a vu en question 2.c) que pour tout $t \geqslant 0, g'(t) > 0$. Le signe de $g''(t)$ est donc celui de $1 - \dfrac{2g(t)}{M}$ et on a alors

$$g''(t) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{2g(t)}{M} \geqslant 0 \Leftrightarrow g(t) \leqslant \frac{M}{2} \Leftrightarrow g(t) \leqslant g(t_0),$$

ce qui équivaut à $t \leqslant t_0$ par stricte croissance de g sur $\mathbb{R}_+$.

On a donc $g''(t) \geqslant 0$ pour $t \leqslant t_0$ et $g''(t) \leqslant 0$ pour $t \geqslant t_0$, ce qui signifie que $g'(t)$ décroît à partir de $t = t_0$. Or, la fonction g représente le nombre de bactéries, donc la fonction g' représente la vitesse d'accroissement de ce nombre de bactéries.

Ainsi, $\boxed{\text{la vitesse d'accroissement du nombre de bactéries est décroissante à partir de } t_0.}$

(g) On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} g(t)dt &= \frac{a}{\ln(C)} \int_0^{t_0} \frac{M}{1 + Ce^{-at}} dt \\
&= \frac{M}{\ln(C)} \int_0^{t_0} \frac{ae^{at}}{e^{at} + C} dt \\
&= \frac{M}{\ln(C)} \left[\ln(e^{at} + C)\right]_0^{t_0} \quad \text{car pour tout } t \geqslant 0, e^{at} + C > 0 \\
&= \frac{M}{\ln(C)} \left(\ln(e^{at_0} + C) - \ln(1 + C)\right) \\
&= \frac{M}{\ln(C)} \left(\ln(e^{\ln(C)} + C) - \ln(1 + C)\right) \\
&= \boxed{\frac{M}{\ln(C)} \times \ln\left(\frac{2C}{1 + C}\right)}.
\end{aligned}$$

Partie C

1. On sait d'après la question 2 de la partie A, que pour tout $t \geqslant 0$, on a $f(t) = N_0 e^{at}$. Ainsi,

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(0) & = & 1 \\ f(0,5) & = & 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} N_0 & = & 1 \\ N_0 e^{\frac{a}{2}} & = & 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} N_0 & = & 1 \\ \frac{a}{2} & = & \ln(2) \end{array}\right.$$

d'où $\boxed{N_0 = 1}$ et $\boxed{a = 2\ln(2).}$

Or, d'après la question 3 de la partie A, $\boxed{T = \dfrac{\ln(2)}{a} = \dfrac{1}{2}.}$

2. Puisque $M = 100N_0 = 100$ et $a = 2\ln(2) = \ln(4)$, on a pour tout $t \geqslant 0, g(t) = \dfrac{100}{1 + Ce^{-t\ln(4)}} = \dfrac{100}{1 + C4^{-t}}$.

Or, on sait également que $g(0) = N_0 = 1$ donc $1 = \dfrac{100}{1 + C}$ d'où $1 + C = 100$, i.e. $C = 99$.

On en déduit que $\boxed{\forall t \geqslant 0, g(t) = \dfrac{100}{1 + 99 \times 4^{-t}}.}$

Problème 2 : Une équation différentielle d'ordre 2 à cœfficients non constants

Partie I : Résolution par changement de fonction

1. Soit $x \in]0, +\infty[$. On peut bien calculer $z(\ln(x))$ puisque z est définie sur $\mathbb{R}$ et on a $z(\ln(x)) = y(e^{\ln(x)}) = x$ d'où $\boxed{\forall x > 0, y(x) = z(\ln(x)).}$
2. • Supposons que z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a pour tout $x > 0, y(x) = z(\ln(x))$ donc y est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout $x > 0, y'(x) = \dfrac{z'(\ln(x))}{x}$.

De même, puisque z' est dérivable sur $\mathbb{R}$ par hypothèse, y' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée d'applications dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout $x > 0$,

$$y''(x) = \frac{\frac{z''(\ln(x))}{x} \times x - z'(\ln(x))}{x^2} = \frac{z''(\ln(x)) - z'(\ln(x))}{x^2}.$$

• Supposons que y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a pour tout réel $t, z(t) = y(e^t)$. Puisque pour tout réel $t, e^t > 0$ et que y est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, alors z est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on pour tout $t \in \mathbb{R}, z'(t) = e^t y'(e^t)$.

De même, puisque y' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction z' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$z''(t) = e^t y'(e^t) + (e^t)^2 y''(e^t) = e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(e^t).$$

Ainsi, on a bien montré que z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. • Supposons que y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. D'après les calculs faits en question précédente, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} z''(t) + 4z'(t) + 3z(t) & = & e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(e^t) + 4e^t y'(e^t) + 3y(e^t) \\ & = & (e^t)^2 y''(e^t) + 5e^t y'(e^t) + 3y(e^t). \end{array}$$

Or, puisque y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$, on a pour tout $x>0, x^2y''(x)+5xy'(x)+3y(x)=x^2$. Pour tout $t\in\mathbb{R}, e^t>0$ donc on a pour tout $t\in\mathbb{R}, (e^t)^2y''(e^t)+5e^ty'(e^t)+3y(e^t)=(e^t)^2=e^{2t}$ d'où, pour tout $t\in\mathbb{R}, z''(t)+4z'(t)+3z(t)=e^{2t}$, ce qui prouve que z est solution sur $\mathbb{R}$ de (F).

• Réciproquement, supposons que z est solution de (F) sur $\mathbb{R}$.

D'après les calculs faits en question précédente, on a pour tout $x>0$:

$$\begin{aligned} x^2y''(x)+5xy'(x)+3y(x) &= z''(\ln(x))-z'(\ln(x))+5z'(\ln(x))+3z(\ln(x)) \\ &= z''(\ln(x))+4z'(\ln(x))+3z(\ln(x)). \end{aligned}$$

Or, puisque z est solution de (F) sur $\mathbb{R}$, on a pour tout $t\in\mathbb{R}, z''(t)+4z'(t)+3z(t)=e^{2t}$ d'où pour tout $x>0, z''(\ln(x))+4z'(\ln(x))+3z(\ln(x))=e^{2\ln(x)}=x^2$.

Ainsi, pour tout $x>0, x^2y''(x)+5xy'(x)+3y(x)=x^2$, ce qui prouve que y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

Finalement, on a bien montré que

$$\boxed{z\text{ est solution de }(F)\text{ sur }\mathbb{R}\text{ si et seulement si }y\text{ est solution de }(E)\text{ sur }\mathbb{R}_+^*.}$$

4. • Soit $(H):\forall t\in\mathbb{R}, z''(t)+4z'(t)+3z(t)=0$ l'équation homogène associée à (F).
Les racines de l'équation caractéristique associée $r^2+4r+3=0$ sont $r_1=-1$ et $r_2=-3$ donc d'après le cours, on sait que

$$\mathcal{S}_H=\left\{z:t\mapsto \lambda e^{-t}+\mu e^{-3t}, (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

• Cherchons une solution particulière de (F) sous la forme $z(t)=ae^{2t}$ où $a\in\mathbb{R}$. On a pour tout $t\in\mathbb{R}, z'(t)=2ae^{2t}$ et $z''(t)=4ae^{2t}$ donc

$$\begin{aligned} \forall t\in\mathbb{R}, z''(t)+4z'(t)+3z(t)=e^{2t} &\Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R}, e^{2t}(4a+8a+3a)=e^{2t} \\ &\Leftrightarrow 15a=1 \quad \text{car pour tout } t\in\mathbb{R}, e^{2t}\neq 0 \\ &\Leftrightarrow a=\frac{1}{15}. \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $t\mapsto \frac{1}{15}e^{2t}$ est solution particulière de (F) donc les solutions de (F) sur $\mathbb{R}$ sont

$$\boxed{\mathcal{S}_F=\left\{z:t\mapsto \lambda e^{-t}+\mu e^{-3t}+\frac{1}{15}e^{2t}, (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}.}$$

5. On sait d'après la question 3) que y est solution de (E) sur $]0,+\infty[$ si et seulement si z est solution de (F) sur $\mathbb{R}$, c'est à dire d'après la question précédente si et seulement si il existe un couple $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que pour tout $t\in\mathbb{R}, z(t)=\lambda e^{-t}+\mu e^{-3t}+\frac{1}{15}e^{2t}$, ce qui équivaut à pour tout $x\in]0,+\infty[, y(x)=z(\ln(x))=\lambda e^{-\ln(x)}+\mu e^{-3\ln(x)}+\frac{1}{15}e^{2\ln(x)}=\frac{\lambda}{x}+\frac{\mu}{x^3}+\frac{1}{15}x^2$ donc

$$\boxed{\mathcal{S}_E=\left\{y:x\mapsto \frac{\lambda}{x}+\frac{\mu}{x^3}+\frac{1}{15}x^2, (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}.}$$

Partie II : Résolution par changement de variable

1. La fonction u est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car y l'est et on a pour tout $x>0, u'(x)=3x^2y(x)+x^3y'(x)$ et

$$u''(x)=6xy(x)+3x^2y'(x)+3x^2y'(x)+x^3y''(x)=x^3y''(x)+6x^2y'(x)+6xy(x).$$

Ainsi, on a pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} u''(x) - \frac{u'(x)}{x} &= x^3y''(x) + 6x^2y'(x) + 6xy(x) - 3xy(x) - x^2y'(x) \\ &= x(x^2y''(x) + 5xy'(x) + 3y(x)). \end{aligned}$$

On a alors les équivalences

$$\begin{aligned} y \in \mathcal{S}_E &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+^*, x^2y''(x) + 5xy'(x) + 3y(x) = x^2 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+^*, x(x^2y''(x) + 5xy'(x) + 3y(x)) = x^3 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+^*, u''(x) - \frac{u'(x)}{x} = x^3 \\ &\Leftrightarrow u \in \mathcal{S}_G \end{aligned}$$

donc $\boxed{y \text{ est solution de } (E) \text{ si et seulement si } u \text{ est solution de } (G).}$

2. • On a $u \in \mathcal{S}_G \Leftrightarrow u' \in \mathcal{S}_{G'}$ où

$$(G') : \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) - \frac{f(x)}{x} = x^3.$$

Soit $(H') : \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) - \dfrac{f(x)}{x} = 0$ l'équation homogène associée à (G').
Si on pose pour tout $x > 0, a(x) = -\dfrac{1}{x}$, alors la fonction $A : x \mapsto -\ln(x)$ est une primitive de a sur $\mathbb{R}_+^*$ donc

$$\mathcal{S}_{H'} = \{f : x \mapsto \lambda e^{\ln(x)}, \lambda \in \mathbb{R}\} = \{f : x \mapsto \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Pour trouver une solution particulière de (G'), on utilise la méthode de variation de la constante, i.e. on cherche une solution particulière de (G') sous la forme $f_p(x) = \lambda(x)x$ où $\lambda : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
On a alors

$$\begin{aligned} f_p \in \mathcal{S}_{(G')} &\Leftrightarrow \forall x > 0, f_p'(x) - \frac{f_p(x)}{x} = x^3 \\ &\Leftrightarrow \forall x > 0, \lambda'(x)x + \lambda(x) - \lambda(x) = x^3 \\ &\Leftrightarrow \forall x > 0, \lambda'(x) = x^2. \end{aligned}$$

On peut poser pour tout $x > 0, \lambda(x) = \dfrac{x^3}{3}$ et on trouve que $f_p : x \mapsto \lambda(x)x = \dfrac{x^4}{3}$ est une solution particulière de (G') sur $\mathbb{R}_+^*$.
Ainsi, $\mathcal{S}_{G'} = \{f : x \mapsto \lambda x + \dfrac{x^4}{3}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
Ainsi,

$$u \in \mathcal{S}_G \Leftrightarrow u' \in \mathcal{S}_{G'} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, u'(x) = \lambda x + \frac{x^4}{3} \Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, u(x) = \lambda\frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{15} + \mu.$$

Quand λ parcourt $\mathbb{R}$, $\dfrac{\lambda}{2}$ fait de même donc

$$\boxed{\mathcal{S}_G = \{u : x \mapsto \lambda x^2 + \frac{x^5}{15} + \mu, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.}$$

Remarque : on pouvait aussi remarquer que

$$(G) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \frac{xu''(x) - u'(x)}{x^2} = x^2 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, v'(x) = x^2$$

où $v(x) = \dfrac{u'(x)}{x}$. donc $(G) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, v(x) = \dfrac{x^3}{3} + \lambda$ i.e. $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = \dfrac{x^4}{3} + \lambda x$ d'où $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, u(x) = \dfrac{x^5}{15} + \lambda \dfrac{x^2}{2} + \mu$.

• D'après la question précédente, on a

$$y \in \mathcal{S}_E \Leftrightarrow x \mapsto x^3 y(x) \in \mathcal{S}_G \Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, x^3 y(x) = \lambda x^2 + \frac{x^5}{15} + \mu$$

donc finalement

$$\boxed{\mathcal{S}_E = \left\{ y : x \mapsto \frac{\lambda}{x} + \frac{\mu}{x^3} + \frac{x^2}{15}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

Problème 3 : Une équation différentielle d'ordre 1 non linéaire

1. (a) Par hypothèse, on a pour tout $x \in]0, +\infty[, f'(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Puisque f et $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, $\boxed{f' \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^*}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (b) On a pour tout $x > 0, f'(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ donc en dérivant cette égalité, on obtient pour tout $x > 0, f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} f'\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

   Or, pour tout $x > 0, f'(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ donc en appliquant cette égalité à $\dfrac{1}{x}$, on en déduit que pour tout $x > 0, f'\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(x)$ d'où pour tout $x > 0, f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} f(x)$, i.e. pour tout $x > 0, x^2 f''(x) + f(x) = 0$ donc $\boxed{f \text{ est solution de } (E') \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.}$

2. (a) Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}, x \mapsto e^x$ est dérivable à valeurs strictement positives et que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que z est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables et on a pour tout $x \in \mathbb{R}, z'(x) = e^x f'(e^x)$.

   De même, puisque f' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question 1.a), on en déduit que z' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables et on a pour tout $x \in \mathbb{R}, z''(x) = e^x f'(e^x) + (e^x)^2 f''(e^x)$.

   On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$z''(x) - z'(x) + z(x) = e^x f'(e^x) + (e^x)^2 f''(e^x) - e^x f'(e^x) + f(e^x) = (e^x)^2 f''(e^x) + f(e^x).$$

   D'après la question 1.b), on sait que f est solution de (E') sur $\mathbb{R}_+^*$ donc pour tout $x > 0, x^2 f''(x) + f(x) = 0$.

   Or, pour tout $x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ donc en appliquant l'équation (E') pour e^x, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}, (e^x)^2 f''(e^x) + f(e^x) = 0$, i.e.

$$\forall x \in \mathbb{R}, z''(x) - z'(x) + z(x) = 0,$$

   ce qui prouve que $\boxed{z \text{ est solution de } (E'') \text{ sur } \mathbb{R}.}$

(b) Soit $(EC) : r^2 - r + 1 = 0$ l'équation caractéristique associée à (E'').
On a $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$ donc (EC) admet deux racines complexes conjuguées que sont $r_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
D'après le cours, les solutions de (E'') sur $\mathbb{R}$ sont

$$\boxed{\mathcal{S}_{E''} = \left\{ y : x \mapsto e^{\frac{x}{2}} \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

(c) On a pour tout $x \in \mathbb{R}, z(x) = f(e^x)$ donc pour tout $x > 0, z(\ln(x)) = f(e^{\ln(x)}) = f(x)$.
Or, puisque $z \in \mathcal{S}_{E''}$ d'après la question 2.a), on sait d'après la question précédente qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}, z(x) = e^{\frac{x}{2}} \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$.
Ainsi, pour tout $x > 0, f(x) = z(\ln(x)) = e^{\frac{\ln(x)}{2}} \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\right)$
i.e.

$$\boxed{\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x > 0, f(x) = \sqrt{x} \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\right).}$$

(d) D'après la question précédente, on a $f(1) = \lambda\cos(0) + \mu \sin(0)$ donc $\boxed{f(1) = \lambda.}$
Par ailleurs, puisque f est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$, on a pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{\frac{1}{x}} \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)$$

i.e.

$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\lambda \cos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right) + \mu \sin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\right)$$

ou encore

$$\boxed{\forall x > 0, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right) - \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\right).}$$

Autre méthode : en dérivant l'expresson de f obtenue en question précédente, on obtient pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\right) \\ &\quad + \sqrt{x}\left(-\frac{\lambda\sqrt{3}}{2x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right) + \frac{\mu\sqrt{3}}{2x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\right) \\ &= \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}} \left((\lambda + \mu\sqrt{3}) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right) + (\mu - \lambda\sqrt{3}) \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\right).} \end{aligned}$$

(e) En utilisant la première formule obtenue par f' en question précédente, on trouve $f'(1) = \lambda$.

En utilisant la deuxième formule, on trouve $f'(1) = \dfrac{1}{2}(\lambda + \mu\sqrt{3})$ d'où

$$\lambda = \frac{1}{2}(\lambda + \mu\sqrt{3}) \Leftrightarrow 2\lambda = \lambda + \mu\sqrt{3}$$

d'où $\boxed{\lambda = \sqrt{3}\mu.}$

(f) On a pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}
2\mu\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x) - \frac{\pi}{6}\right) &= 2\mu\sqrt{x}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \\
&= 2\mu\sqrt{x}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\frac{1}{2}\right) \\
&= \sqrt{x}\left(\sqrt{3}\mu\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right) + \mu\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\right).
\end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente, $\lambda = \sqrt{3}\mu$ donc pour tout $x > 0$:

$$2\mu\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x) - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{x}\left(\lambda\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right) + \mu\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\right),$$

i.e. $\boxed{\text{pour tout } x > 0, f(x) = 2\mu\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x) - \frac{\pi}{6}\right)}$ (en utilisant l'expression de f obtenue en question 2.c)).

3. Soit $c \in \mathbb{R}$. Soit $g : x \mapsto c\sqrt{x}\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln(x) - \dfrac{\pi}{6}\right)$.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{c}{2\sqrt{x}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)-\frac{\pi}{6}\right) - c\sqrt{x}\times\frac{\sqrt{3}}{2x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)-\frac{\pi}{6}\right)\\
&= \frac{c}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)-\frac{\pi}{6}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)-\frac{\pi}{6}\right)\right)\\
&= \frac{c}{\sqrt{x}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)-\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)-\frac{\pi}{6}\right)\right)\\
&= \frac{c}{\sqrt{x}}\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)-\frac{\pi}{6}\right) \quad \text{(formule d'addition de cos)}\\
&= \frac{c}{\sqrt{x}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)+\frac{\pi}{6}\right)\\
&= \frac{c}{\sqrt{x}}\cos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)-\frac{\pi}{6}\right) \quad \text{(par parité de cos)}\\
&= c\sqrt{\frac{1}{x}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{\pi}{6}\right)\\
&= g\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

donc $\boxed{g \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.}$

4. Dans les questions 1 et 2, on a montré que si f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$, alors il existe une constante c (en posant $c = 2\mu$) telle que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = c\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)-\frac{\pi}{6}\right).$$

Réciproquement, on a vérifié dans la question précédente que toutes les fonctions de cette forme étaient bien solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.
Finalement, on a donc bien

$$\boxed{\mathcal{S}_E = \left\{f : x \mapsto c\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)-\frac{\pi}{6}\right), c \in \mathbb{R}\right\}.}$$

5. Soit f une solution de (E). Il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 0$, $f(x) = c\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)-\frac{\pi}{6}\right)$.

On a alors

$$f(1) = \sqrt{3} \Leftrightarrow c\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow c\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow c = 2$$

donc l'unique solution f de (E) vérifiant $f(1) = \sqrt{3}$ est la fonction $\boxed{f : x \mapsto 2\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)-\frac{\pi}{6}\right)}.$

La fonction $x \mapsto \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)-\frac{\pi}{6}\right)$ est bornée et $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x} = 0$ donc par produit, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0.}$