BCPST1
A. Panetta

Devoir surveillé de mathématiques n°3

Samedi 30 novembre 2024 (4h00)

L'énoncé est constitué de trois problèmes et comporte 5 pages.
Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, la précision et la concision de la rédaction. Le soin de la copie ainsi que l'orthographe entreront également pour une part importante dans l'appréciation du travail rendu.
Les résultats doivent être encadrés.
Si un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 : Deux modèles d'évolution d'une population de bactéries

Ce problème a pour objet l'étude de deux modèles d'évolution d'une population de bactéries :
• un premier modèle pour les instants qui suivent l'ensemencement (partie A) ;
• un second modèle pouvant s'appliquer sur une longue période (partie B).
Dans tout ce problème, on note N_0 le nombre de bactéries introduites dans un milieu de culture à l'instant $t = 0$. N_0 est un nombre réel strictement positif, exprimé en millions d'individus.

Partie A : Modèle de Malthus

Dans les instants qui suivent l'ensemencement du milieu de culture, on considère que la vitesse d'accroissement des bactéries est proportionnelle au nombre de bactéries en présence.
Dans ce premier modèle, on note $f(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en millions d'individus). La fonction f est donc solution de l'équation différentielle

$$(E_1) : \forall t \in [0, +\infty[, y'(t) = ay(t),$$

où a est un nombre réel strictement positif dépendant des conditions expérimentales.

1. Trouver l'expression de $f(t)$ pour tout $t \geqslant 0$ sachant que $f(0) = N_0$.
2. Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$.
3. On note T le temps de doublement de la population bactérienne. Démontrer que

$$\forall t \in [0, +\infty[, f(t) = N_0 2^{\frac{t}{T}}.$$

Partie B : Modèle de Verhulst

Le milieu étant limité (en volume, en éléments nutritifs...), le nombre de bactéries ne peut pas croître indéfiniment de façon exponentielle. Le modèle précédent ne peut donc s'appliquer sur une longue période. Pour tenir compte de ces observations, on représente l'évolution de la population de bactéries de la façon suivante :
Soit $g(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en millions d'individus). On suppose que pour tout $t \geqslant 0, g(t) > 0$, que g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que g est solution sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation

$$(E_2) : \forall t \geqslant 0, g'(t) = a\left(1 - \frac{g(t)}{M}\right) g(t),$$

où M est une constante strictement positive dépendant des conditions expérimentales et a est le réel défini dans la partie A.

1. (a) Démontrer que si g est une fonction à valeurs strictement positives solution de l'équation (E_2), alors la fonction $\dfrac{1}{g}$ est solution de l'équation différentielle

$$(E_2') : \forall t \in [0, +\infty[, y'(t) + ay(t) = \frac{a}{M}.$$

   (b) Résoudre (E_2').

   (c) Démontrer que si h est une solution strictement positive de (E_2'), alors $\dfrac{1}{h}$ est solution de (E_2).

2. On suppose dorénavant qu'on a

$$\forall t \in [0,+\infty[, g(t) = \frac{M}{1+Ce^{-at}},$$

où C est une constante strictement supérieure à 1 dépendant des conditions expérimentales.

   (a) Justifier sans calcul que g est solution de (E_2).

   (b) Calculer $\lim_{t\to+\infty} g(t)$ et montrer que pour tout $t \geqslant 0$, on a $0 < g(t) < M$.

   (c) Etudier le sens de variation de g.
   Indication : on pourra utiliser l'équation (E_2).

   (d) Trouver l'unique nombre réel t_0 strictement positif tel que $g(t_0) = \frac{M}{2}$. On exprimera t_0 en fonction de a et C.

   (e) Justifier que g' est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ puis montrer que

$$\forall t \geqslant 0, g''(t) = a\left(1 - \frac{2g(t)}{M}\right) g'(t).$$

   (f) Etudier le signe de g''. En déduire que la vitesse d'accroissement du nombre de bactéries est décroissante à partir de l'instant t_0 défini ci-dessus.

   (g) (**Question bonus**)
   Sachant que le nombre de bactéries à l'instant t est $g(t)$, calculer le nombre moyen de bactéries entre les instants 0 et t_0 en fonction de M et C.
   On rappelle que la moyenne de g sur l'intervalle $[0, t_0]$ vaut $\frac{1}{t_0}\int_0^{t_0} g(t)dt$.

Partie C

1. Sachant que la courbe représentative de f passe par les points de coordonnées respectives $(0;1)$ et $(0,5;2)$, déterminer les valeurs de N_0, T et a.
2. Sachant que $g(0) = N_0$ et $M = 100N_0$, démontrer qu'on a

$$\forall t \geqslant 0, g(t) = \frac{100}{1 + 99 \times 4^{-t}}.$$

Problème 2 : Une équation différentielle d'ordre 2 à cœfficients non constants

Le but de ce problème est de résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle

$$(E) : \forall x > 0, x^2y''(x) + 5xy'(x) + 3y(x) = x^2.$$

Partie I : Résolution par changement de fonction

Soit $y :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$. On pose pour tout réel $t, z(t) = y(e^t)$.

1. Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a $y(x) = z(\ln(x))$.
2. Justifier que z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ (i.e. z et z' sont dérivables sur $\mathbb{R}$) si et seulement si y est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$.
3. Montrer que y est solution de (E) sur $]0,+\infty[$ si et seulement si z est solution sur $\mathbb{R}$ de

$$(F) : \forall t \in \mathbb{R}, z''(t) + 4z'(t) + 3z(t) = e^{2t}.$$

4. Résoudre (F) sur $\mathbb{R}$.
   Indication : On pourra chercher une solution particulière de (F) sous la forme $z(t) = ae^{2t}$, où $a \in \mathbb{R}$.
5. En déduire les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$.

Partie II : Résolution par changement de variable

Soit $y :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On pose pour tout $x \in]0, +\infty[, u(x) = x^3 y(x)$.

1. Montrer que y est solution de (E) sur $]0, +\infty[$ si et seulement si u est solution sur $]0, +\infty[$ de
$$(G) : \forall x \in]0, +\infty[, u''(x) - \frac{u'(x)}{x} = x^3.$$
2. Résoudre (G) et en déduire à nouveau les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$.

Problème 3 : Une équation différentielle d'ordre 1 non linéaire

Le but de ce problème est de résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle
$$(E) : \forall x \in]0, +\infty[, y'(x) = y\left(\frac{1}{x}\right).$$

On considère $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ solution de l'équation (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. (a) En utilisant le fait que f est solution de (E), justifier que f' est dérivable sur $]0, +\infty[$.
   (b) Démontrer que f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation
   $$(E') : \forall x \in]0, +\infty[, x^2 y''(x) + y(x) = 0.$$
2. On introduit la fonction $z : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie pour tout réel x par $z(x) = f(e^x)$.
   (a) Justifier que z est deux fois dérivable et montrer que z est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation
   $$(E'') : \forall x \in \mathbb{R}, y''(x) - y'(x) + y(x) = 0.$$
   (b) Donner les solutions de (E'') sur $\mathbb{R}$.
   (c) En déduire qu'il existe deux réels $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \sqrt{x}\left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\right).$$
   (d) Calculer $f(1)$ puis $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   (e) En calculant $f'(1)$ de deux manières différentes, montrer que
   $$\lambda = \sqrt{3}\mu.$$
   (f) En déduire que
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = 2\mu\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x) - \frac{\pi}{6}\right).$$

3. Réciproquement, vérifier que toute fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall x \in]0, +\infty[, g(x) = c\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x) - \frac{\pi}{6}\right),$$

   où c est une constante réelle, est une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Conclure quant aux solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. Montrer qu'il existe une unique solution f de (E) vérifiant la condition $f(1) = \sqrt{3}$ et donner l'expression de cette fonction. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.