Lycée Fénelon
Année 2024-2025

BCPST1
A. Panetta

Devoir maison n°9
A rendre pour le Jeudi 16 Janvier 2025

Exercice 1 : Matrices de rotation

Pour tout réel θ, on définit la matrice de rotation $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

1. Calculer $R(0)$ et $R(\pi)$.
2. Soient $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $R(\theta) = R(\theta')$ si et seulement si $\theta \equiv \theta'[2\pi]$.
3. Trouver les réels θ pour lesquels $R(\theta)$ est symétrique.
4. Trouver les réels θ pour lesquels $R(\theta)$ est antisymétrique.
5. Pour tout réel θ, calculer $\det(R(\theta))$. En déduire que $R(\theta)$ est inversible et vérifier que $R(\theta)^{-1} = R(\theta)^T = R(-\theta)$.
6. Montrer que pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2, R(\theta)R(\theta') = R(\theta')R(\theta) = R(\theta + \theta')$.
7. Déduire des deux questions précédentes la valeur de $R(\theta)^n$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
8. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv 0[\pi]$.
   (a) Résoudre l'équation $R(\theta)X = e^{i\theta}X$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$.
   (b) Résoudre l'équation $R(\theta)X = e^{-i\theta}X$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$.
   (c) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible, calculer P^{-1} puis $P^{-1}R(\theta)P$.

Exercice 2 : Trace d'une matrice

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit la trace de A, notée $\mathrm{Tr}(A)$, comme la somme de ses cœfficients diagonaux, c'est à dire $\mathrm{Tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Par exemple, la trace de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ vaut $2 - 1 + 4 = 5$.

1. Calculer $\mathrm{Tr}(0_n)$ et $\mathrm{Tr}(I_n)$.
2. Soient $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 6 & -5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 7 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.
   Comparer $\mathrm{Tr}(MN)$ et $\mathrm{Tr}(NM)$.
3. (a) Vérifier que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{Tr}(A^T) = \mathrm{Tr}(A)$.
   (b) Montrer que pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,
$$\mathrm{Tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \mathrm{Tr}(A) + \mu \mathrm{Tr}(B).$$

(c) Montrer que pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

(d) En déduire que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour toute matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible, $\mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{Tr}(A)$.

4. Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), A^2 - \mathrm{Tr}(A)A + \det(A)\mathrm{I}_2 = 0_2$.