Corrigé de la liste d'exercices n°11 **Systèmes linéaires**

Exercice 1

1. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} & & 2y & - & 2z & + & t & = & 1\\ x & - & y & + & z & + & 2t & = & -1\\ & & & & 2z & - & t & = & 2\end{array}\right. \overset{L_1\leftrightarrow L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & z & + & 2t & = & -1\\ & & 2y & - & 2z & + & t & = & 1\\ & & & & 2z & - & t & = & 2\end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcc} x & = & y-z-2t-1=-\frac{5}{2}t-\frac{1}{2}\\ y & = & \frac{3}{2}\\ z & = & \frac{t}{2}+1\end{array}\right.$$

Le système admet donc une infinité de solutions que sont

$$\{(x,y,z,t)=\left(-\frac{5}{2}t-\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{t}{2}+1,t\right),t\in\mathbb{R}\}.$$

2. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & z & + & t & = & 3\\ 2x & + & y & + & z & - & 2t & = & -3\end{array}\right. \overset{L_2\leftarrow L_2-2L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & z & + & t & = & 3\\ & - & 3y & + & 3z & - & 4t & = & -9\end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcl} x & & & = & -2y+z-t+3\\ & & y & = & z-\frac{4}{3}t+3\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcl} x & & & = & -z+\frac{5}{3}t-3\\ & & y & = & z-\frac{4}{3}t+3\end{array}\right.$$

Le système admet donc une infinité de solutions que sont

$$\{(x,y,z,t)=\left(-z+\frac{5}{3}t-3,z-\frac{4}{3}t+3,z,t\right),(z,t)\in\mathbb{R}^2\}.$$

3. $$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 2\\ x & + & 2y & = & 1\\ x & + & y & = & 1\end{array}\right. \underset{L_3\leftarrow 2L_3-L_1}{\overset{L_2\leftarrow 2L_2-L_1}{\Longleftrightarrow}} \left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 2\\ & & 3y & = & 0\\ & & y & = & 0\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x & = & 1\\ y & = & 0\end{array}\right.$$

Le système admet donc pour unique solution $(x,y)=(1,0)$.

4. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} & & y & + & z & + & t & = & -1\\ x & & & + & z & + & t & = & 0\\ x & + & y & & & + & t & = & 1\\ x & + & y & + & z & & & = & 2\end{array}\right. \overset{L_1\leftrightarrow L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & & & + & z & + & t & = & 0\\ & & y & + & z & + & t & = & -1\\ x & + & y & & & + & t & = & 1\\ x & + & y & + & z & & & = & 2\end{array}\right.$$

$$\underset{L_4\leftarrow L_4-L_1}{\overset{L_3\leftarrow L_3-L_1}{\Longleftrightarrow}} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & & & + & z & + & t & = & 0\\ & & y & + & z & + & t & = & -1\\ & & y & - & z & & & = & 1\\ & & y & & & - & t & = & 2\end{array}\right. \underset{L_4\leftarrow L_4-L_2}{\overset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{\Longleftrightarrow}} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & & & + & z & + & t & = & 0\\ & & y & + & z & + & t & = & -1\\ & & & - & 2z & - & t & = & 2\\ & & & - & z & - & 2t & = & 3\end{array}\right.$$

$$\overset{L_4\leftarrow 2L_4-L_3}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & & & + & z & + & t & = & 0\\ & & y & + & z & + & t & = & -1\\ & & & - & 2z & - & t & = & 2\\ & & & & & - & 3t & = & 4\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrcr} x & & & & = & \frac{5}{3}\\ & y & & & = & \frac{2}{3}\\ & & z & & = & -\frac{1}{3}\\ & & & t & = & -\frac{4}{3}\end{array}\right.$$

Le système admet donc pour unique solution $(x,y,z,t)=(\frac{5}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{4}{3})$.

5. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & & & + & z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & & & = & 12 \\ x & + & 3y & & & = & 0 \end{array}\right. \underset{L_4 \leftarrow L_4 - L_1}{\overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\Longleftrightarrow}} \left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & z & = & 1 \\ y & + & z & = & 0 \\ y & - & z & = & 11 \\ 3y & - & z & = & -1 \end{array}\right.$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2}{\overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\Longleftrightarrow}} \left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & z & = & 1 \\ y & + & z & = & 0 \\ & - & 2z & = & 11 \\ & - & 4z & = & -1 \end{array}\right.$$

donc $z = -\frac{11}{2} = \frac{1}{4}$, ce qui est absurde. On en conclut que le système est incompatible.

6. $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & - & 3t & = & 1 \\ -3x & + & y & + & z & + & t & = & -1 \\ x & - & 3y & + & z & + & t & = & -1 \\ x & + & y & - & 3z & + & t & = & 1 \end{array}\right. \underset{L_4 \leftarrow L_4 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1,\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\Longleftrightarrow}} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & - & 3t & = & 1 \\ & & 4y & + & 4z & - & 8t & = & 2 \\ & - & 4y & & & + & 4t & = & -2 \\ & & & - & 4z & + & 4t & = & 0 \end{array}\right.$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & - & 3t & = & 1 \\ & & 4y & + & 4z & - & 8t & = & 2 \\ & & & & 4z & - & 4t & = & 0 \\ & & & - & 4z & + & 4t & = & 0 \end{array}\right. \overset{L_4 \leftarrow L_4 + L_3}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} x & = & t + \frac{1}{2} \\ y & = & t + \frac{1}{2} \\ z & = & t \\ 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

Le système admet donc une infinité de solutions que sont

$$\{(x,y,z,t) = \left(t + \frac{1}{2}, t + \frac{1}{2}, t, t\right), t \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 2

1.

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} kx & + & y & = & 1 \\ x & + & ky & = & 1 \end{array}\right. \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & ky & = & 1 \\ kx & + & y & = & 1 \end{array}\right. \overset{L_2 \leftarrow L_2 - kL_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & ky & = & 1 \\ & & (1-k^2)y & = & 1-k \end{array}\right.$$

• Si $k = 1$, le système devient équivalent à $x + y = 1$ donc le système admet une infinité de solutions que sont

$$\{(x,y) = (x, 1-x), x \in \mathbb{R}\}.$$

• Si $k = -1$, la deuxième ligne du système devient $0 = 2$ donc le système est incompatible.

• Si $k \notin \{-1, 1\}$, alors $1 - k^2 \neq 0$ et on trouve $y = \dfrac{1-k}{1-k^2} = \dfrac{1}{1+k}$ puis $x = 1 - ky = 1 - \dfrac{k}{1+k} = \dfrac{1}{1+k}$.

Dans ce cas, le système admet pour unique solution $(x,y) = (\frac{1}{1+k}, \frac{1}{1+k})$.

2. $\left\{\begin{array}{rcrcr} kx & + & (k^2-k)y & = & k \\ (k+1)x & - & ky & = & 5k+3 \end{array}\right. \overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcr} -x & + & k^2y & = & -4k-3 \\ (k+1)x & - & ky & = & 5k+3 \end{array}\right.$

$$\overset{L_2 \leftarrow L_2 + (k+1)L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcr} -x & + & k^2y & = & -4k-3 \\ & & (k^3+k^2-k)y & = & -4k^2-2k \end{array}\right.$$

On a $k^3 + k^2 - k = k(k^2 + k - 1) = k(k - \frac{-1+\sqrt{5}}{2})(k - \frac{-1-\sqrt{5}}{2})$

• Si $k = 0$, la deuxième ligne devient $0 = 0$ et le système équivaut à $x = 3$ donc il admet une infinité de solutions que sont $\{(x,y) = (3,y), y \in \mathbb{R}\}$.

- Si $k \in \{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\}$, le système est incompatible car la deuxième ligne donne $0 \neq 0$ (en effet, le second membre $-4k^2-2k$ s'annule pour $k=0$ ou $k=-\frac{1}{2}$).
- Si $k \notin \{0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\}$, on obtient $y = \dfrac{-4k^2-2k}{k^3+k^2-k} = \dfrac{4k+2}{1-k-k^2}$ puis

$$x = k^2y+4k+3 = \frac{4k^3+2k^2+(4k+3)(1-k-k^2)}{1-k-k^2} = \frac{-5k^2+k+3}{1-k-k^2},$$

ce qui fournit une unique solution au système.

3. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & z & = & 3 \\ x & - & y & + & 3z & = & 8 \\ x & + & y & + & 2z & = & k \\ x & + & 2y & + & 2z & = & -3 \end{array}\right. \overset{\substack{L_2\leftarrow 2L_2-L_1\\ L_3\leftarrow 2L_3-L_1\\ L_4\leftarrow 2L_4-L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & z & = & 3 \\ & - & 3y & + & 5z & = & 13 \\ & & y & + & 3z & = & 2k-3 \\ & & 3y & + & 3z & = & -9 \end{array}\right.$$

$$\overset{\substack{L_3\leftarrow 3L_3+L_2\\ L_4\leftarrow L_4+L_2}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & z & = & 3 \\ & - & 3y & + & 5z & = & 13 \\ & & & & 14z & = & 6k+4 \\ & & & & 8z & = & 4 \end{array}\right. \overset{L_4\leftarrow 7L_4-4L_3}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & z & = & 3 \\ & - & 3y & + & 5z & = & 13 \\ & & & & 14z & = & 6k+4 \\ & & & & 0 & = & -24k+12 \end{array}\right.$$

- Si $k \neq \frac{1}{2}$, le système est incompatible.
- Si $k = \frac{1}{2}$, le système est comaptible et on trouve pour unique solution

$$(x,y,z) = \left(3, -\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Exercice 3

1. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & z & = & 3a \\ -2x & - & 3y & + & 3z & = & b \\ x & + & y & - & 2z & = & c \end{array}\right. \overset{\substack{L_2\leftarrow L_2+2L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 3a \\ & & y & + & z & = & 6a+b \\ & - & y & - & z & = & -3a+c \end{array}\right.$$

$$\overset{\substack{L_1\leftarrow L_1-2L_2\\ L_3\leftarrow L_3+L_2}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & & & - & 3z & = & -9a-2b \\ & & y & + & z & = & 6a+b \\ & & & & 0 & = & 3a+b+c \end{array}\right.$$

La dernière ligne montre que $\boxed{\text{le système est compatible si et seulement si } 3a+b+c=0}$ et dans ce cas, on a $y=-z+6a+b$ et $x=3z-9a-2b$.
Ainsi, dans le cas où le système est compatible, il y a une infinité de solutions que sont

$$\boxed{\{(x,y,z) = (3z-9a-2b, -z+6a+b, z), z\in\mathbb{R}\}.}$$

2. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & z & = & a \\ 2x & + & 13y & - & 7z & = & b \\ x & - & y & + & z & = & c \end{array}\right. \overset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow 2L_3-L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & a \\ & & 12y & - & 8z & = & -a+b \\ & - & 3y & + & z & = & -a+2c \end{array}\right. \overset{\substack{L_1\leftarrow 12L_1-L_2\\ L_3\leftarrow 4L_3+L_2}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 24x & & & + & 20z & = & 13a-b \\ & & 12y & - & 8z & = & -a+b \\ & & & - & 4z & = & -5a+b+8c \end{array}\right. \overset{\substack{L_1\leftarrow L_1+5L_3\\ L_2\leftarrow L_2-2L_3}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 24x & & & & & = & -12a+4b+40c \\ & & 12y & & & = & 9a-b-16c \\ & & & - & 4z & = & -5a+b+8c \end{array}\right.$$

On constate que le système est compatible pour tout $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ et l'unique solution du système est

$$\boxed{(x,y,z) = \left(-\frac{a}{2}+\frac{b}{6}+\frac{5c}{3}, \frac{3a}{4}-\frac{b}{12}-\frac{4c}{3}, \frac{5a}{4}-\frac{b}{4}-2c\right).}$$

3.

$$\begin{cases} 4z - t = a \\ 3x + y + z + 2t = b \\ y - 2z + t = c \\ 2t = d \end{cases} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 3x + y + z + 2t = b \\ 4z - t = a \\ y - 2z + t = c \\ 2t = d \end{cases} \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\Longleftrightarrow}$$

$$\begin{cases} 3x + y + z + 2t = b \\ y - 2z + t = c \\ 4z - t = a \\ 2t = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y + z = b - d \\ y - 2z = c - \frac{d}{2} \\ 4z = a + \frac{d}{2} \\ t = \frac{d}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3x + y = b - d - \frac{a}{4} - \frac{d}{8} \\ y = c - \frac{d}{2} + \frac{a}{2} + \frac{d}{4} \\ z = \frac{a}{4} + \frac{d}{8} \\ t = \frac{d}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + = -\frac{a}{4} + b - \frac{9d}{8} - \frac{a}{2} - c + \frac{d}{4} \\ y = \frac{a}{2} + c - \frac{d}{4} \\ z = \frac{a}{4} + \frac{d}{8} \\ t = \frac{d}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -\frac{3a}{4} + b - c - \frac{7d}{8} \\ y = \frac{a}{2} + c - \frac{d}{4} \\ z = \frac{a}{4} + \frac{d}{8} \\ t = \frac{d}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{a}{4} + \frac{b}{3} - \frac{c}{3} - \frac{7d}{24} \\ y = \frac{a}{2} + c - \frac{d}{4} \\ z = \frac{a}{4} + \frac{d}{8} \\ t = \frac{d}{2} \end{cases}$$

Ainsi, le système est compatible pour tout $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ et l'unique solution du système est

$$\boxed{(x, y, z, t) = \left(-\frac{a}{4} + \frac{b}{3} - \frac{c}{3} - \frac{7d}{24}, \frac{a}{2} + c - \frac{d}{4}, \frac{a}{4} + \frac{d}{8}, \frac{d}{2}\right)}.$$

Exercice 4

Supposons dans un premier temps que $(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ et posons $X = \ln(x), Y = \ln(y), Z = \ln(z)$. En appliquant le logarithme à chaque ligne du système, on obtient :

$$\begin{cases} X + 2Y + Z = \ln(2) \\ -X + Y = 0 \\ X - 2Y + Z = \ln(8) \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} X + 2Y + Z = \ln(2) \\ 3Y + Z = \ln(2) \\ -4Y = 2\ln(2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = -\frac{1}{2}\ln(2) \\ Y = -\frac{1}{2}\ln(2) \\ Z = \frac{5}{2}\ln(2) \end{cases}$$

donc $(x, y, z) = (2^{-\frac{1}{2}}, 2^{-\frac{1}{2}}, 2^{\frac{5}{2}}) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 4\sqrt{2})$.
Cherchons maintenant les solutions dans $\mathbb{R}^3$. Si (x, y, z) est solution du système, alors nécessairement x, y et z sont tous trois non nuls.
Par ailleurs, puisque $\frac{y}{x} = 1 > 0$, on en déduit que x et y sont de même signe. Par ailleurs, $xz = 8y^2 > 0$ donc x et z sont également de même signe.
On en déduit que x, y et z sont tous trois strictement positifs, ou tous trois strictement négatifs.
On a déjà résolu le système sous l'hypothèse où ils sont strictement positifs.
Supposons que x, y et z sont strictement négatifs et sont solutions du système. On remarque aisément que $(-x, -y, -z)$ est alors une solution du système avec $-x, -y$ et $-z$ strictement positifs donc $(-x, -y, -z) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 4\sqrt{2})$ d'où $(x, y, z) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -4\sqrt{2})$.
Finalement, le système admet deux solutions : $(x, y, z) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 4\sqrt{2})$ ou $(x, y, z) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -4\sqrt{2})$.