Devoir en temps libre n° 8

État de la matière

Le nombre d'Avogadro est $\mathcal{N}_\mathrm{A} = 6{,}02 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$, utilisable à toutes les questions sauf la dernière. La constante des gaz parfaits est $R = 8{,}314\,\mathrm{J} \cdot \mathrm{mol}^{-1} \cdot \mathrm{K}^{-1}$.

On assimile l'air à un gaz parfait. On se place dans les conditions régnant à la surface de la Terre.

1. Estimer la densité moléculaire moyenne de l'air à la surface de la Terre, exprimée en nombre de molécules par cm^3.

L'eau H_2O, de masse molaire $18{,}015\,\mathrm{g} \cdot \mathrm{mol}^{-1}$, a une masse volumique égale à $1{,}00\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{L}^{-1}$ à $15\,°\mathrm{C}$.

2. Déterminer la quantité de matière (en mole) d'eau dans 1 L d'eau.
3. Calculer la densité moléculaire de l'eau liquide, exprimée en nombre de molécules par cm^3.

La masse du Soleil est estimée à $2 \cdot 10^{30}$ kg et son rayon est de $696 \cdot 10^3$ km. Il est composé d'un plasma, c'est-à-dire un gaz de noyaux atomiques et d'électrons. Sa composition chimique (en masse) est de 75% d'hydrogène ($M_\mathrm{H} = 1\,\mathrm{g} \cdot \mathrm{mol}^{-1}$) et 25% d'hélium ($M_\mathrm{He} = 4\,\mathrm{g} \cdot \mathrm{mol}^{-1}$). On néglige la masse des électrons devant celle des noyaux. On suppose que les deux types de noyaux sont répartis uniformément dans l'astre.

4. Calculer la densité particulaire moyenne du Soleil, exprimée en nombre moyen de noyaux atomiques par cm^3. Le plasma solaire peut-il être assimilé à un gaz parfait ?

On réalise une boule en cuivre, de diamètre $d = 10{,}00\,\mathrm{mm}$; sa masse vaut $m = 4{,}67\,\mathrm{g}$. La pureté du cuivre utilisé est supérieure à $99,99\%$ et on pourra considérer qu'il s'agit de cuivre exempt d'impureté ; la masse molaire du cuivre est $M = 63{,}57\,\mathrm{g} \cdot \mathrm{mol}^{-1}$, et on assimile les atomes de cuivre à des sphères de rayon 128 pm. Une étude cristallographique aux rayons X montre que le cuivre cristallise selon une structure de compacité $0,74$, c'est-à-dire que le volume du cristal est occupé à 74% par des atomes, le reste étant du vide.

5. Montrer que ces données permettent d'obtenir une estimation du nombre d'Avogadro, et calculer cette estimation avec un nombre raisonnable de chiffres significatifs.

Corrigé du devoir en temps libre n° 8

éléments de correction

1. Appelons N le nombre de molécules ; la quantité de matière correspondante est $n = N/\mathcal{N}_\mathrm{A}$. On cherche la densité particulaire, soit N/V. Utilisons l'équation d'état des gaz parfaits :

$$PV = nRT = \frac{NRT}{\mathcal{N}_\mathrm{A}} \Rightarrow \frac{N}{V} = \frac{P\mathcal{N}_\mathrm{A}}{RT}$$

Pour des conditions habituelles à la surface de la Terre ($P \approx 1 \cdot 10^5$ Pa et $T \approx 288$ K soit 15 °C), on obtient :

$$\frac{N}{V} = \frac{1 \cdot 10^5 \times 6 \cdot 10^{23}}{8,314 \times 288} = 2,5 \cdot 10^{25}\,\mathrm{m}^{-3}$$

Sachant que $1\,\mathrm{cm}^3 = 10^{-6}\,\mathrm{m}^3$, l'air dans les conditions habituelles à la surface de la Terre contient donc environ $2,5 \cdot 10^{19}$ molécules par centimètre cube.

2. Partons de la masse volumique de l'eau, et exprimons la masse en fonction de la quantité de matière :

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{nM}{V} \Rightarrow n = \frac{\rho V}{M}$$

Pour un volume $V = 1$ L, et en n'oubliant pas d'exprimer toutes les masses dans la même unité ($\rho = 1\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{L}^{-1}$ et $M = 18 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{mol}^{-1}$ ou bien $\rho = 1 \cdot 10^3\,\mathrm{g} \cdot \mathrm{L}^{-1}$ et $M = 18\,\mathrm{g} \cdot \mathrm{mol}^{-1}$) on obtient : $n = 1 \times 1/18 \cdot 10^{-3} = 55,6$ mol. Autrement dit, la concentration molaire de l'eau est $n/V = 55,6\,\mathrm{mol} \cdot \mathrm{L}^{-1}$.

3. Pour passer à la densité moléculaire, il faut convertir la quantité de matière en nombre de particules, soit $N = n\mathcal{N}_\mathrm{A}$. La densité moléculaire est donc :

$$\frac{N}{V} = \frac{n\mathcal{N}_\mathrm{A}}{V} = 55,6 \times 6 \cdot 10^{23} = 3,3 \cdot 10^{25}\,\mathrm{L}^{-1}$$

Comme $1\,\mathrm{L} = 1\,\mathrm{dm}^3 = 10^3\,\mathrm{cm}^3$, la densité moléculaire de l'eau liquide est de $3,3 \cdot 10^{22}$ molécules par centimètre cube. On trouve une valeur de l'ordre de 10^3 fois plus grande que l'air, ce qui est l'ordre de grandeur attendu de la différence de densité entre un liquide et un gaz.

4. Commençons par calculer la masse molaire moyenne des particules composant le plasma :

$$M = x_\mathrm{H} \times M_\mathrm{H} + x_\mathrm{He} \times M_\mathrm{He} = 1,75\,\mathrm{g} \cdot \mathrm{mol}^{-1} = 1,75 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{mol}^{-1}$$

Connaissant la masse du Soleil, on peut en déduire la quantité de matière qu'il contient : $n = m/M = 1,14 \cdot 10^{33}$ mol, soit un nombre de noyaux de :

$$N = n\mathcal{N}_\mathrm{A} = \frac{m\mathcal{N}_\mathrm{A}}{M} = 6,9 \cdot 10^{56}$$

D'autre part, en assimilant le Soleil à une sphère de rayon $R = 696 \cdot 10^3\,\mathrm{km} = 696 \cdot 10^6\,\mathrm{m} = 696 \cdot 10^8\,\mathrm{cm}$, son volume est :

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times (696 \cdot 10^8)^3 = 1,41 \cdot 10^{33}\,\mathrm{cm}^3$$

La densité particulaire du Soleil est donc : $N/V \approx 5 \cdot 10^{23}$ noyaux par centimètre cube. Notons qu'il s'agit en fait d'une valeur moyenne, la densité étant d'autant plus grande qu'on se rapproche du centre de l'astre. Cette valeur est supérieure à celle de l'eau liquide à la surface de la Terre ! Cela signifie que les noyaux du plasma solaire sont très proches les uns des autres, ce qui rend improbable qu'on puisse négliger les interactions entre eux (d'autant qu'ils sont chargés) ; cela n'est pas compatible avec le modèle du gaz parfait qui postule que les particules sont sans interaction entre elles.

5. On va exprimer le volume occupé par les atomes de cuivre de deux façons différentes, dont l'une est indépendante du nombre d'Avogadro et l'autre en dépend. La boule est une sphère de rayon d dont on peut calculer le volume. Sachant que les atomes occupent seulement 74% du volume de la boule, on peut en déduire le volume occupé par les atomes de cuivre constituant la boule :

$$V_{\text{atomes}} = 0,74 \times V_{\text{boule}} = 0,74 \times \frac{4}{3}\pi \left(\frac{d}{2}\right)^3 = 0,74 \times \frac{\pi d^3}{6}$$

D'autre part, on peut estimer le nombre d'atomes contenus dans la boule, connaissant sa masse et la masse molaire des atomes de cuivre. Si la boule contient N atomes, soit une quantité de matière $n = N/\mathcal{N}_{\text{A}}$, ceux-ci ont une masse totale $nM = NM/\mathcal{N}_{\text{A}}$, qui est évidemment la masse totale de la boule. On en déduit le nombre d'atomes contenus dans la boule de masse m :

$$m = \frac{NM}{\mathcal{N}_{\text{A}}} \Rightarrow N = \frac{m\mathcal{N}_{\text{A}}}{M}$$

Par ailleurs, si on assimile les atomes à des sphères de rayon r, le volume total des N atomes constituant la boule est :

$$V_{\text{atomes}} = N \times \frac{4}{3}\pi\, r^3$$

En remplaçant N par son expression, on obtient :

$$V_{\text{atomes}} = \frac{m}{M} \times \mathcal{N}_{\text{A}} \times \frac{4}{3}\pi\, r^3$$

En égalant les deux expressions du volume des atomes, on peut isoler le nombre d'Avogadro :

$$\frac{m}{M} \times \mathcal{N}_{\text{A}} \times \frac{4}{3}\pi\, r^3 = 0,74 \times \frac{\pi a^3}{6} \Rightarrow \mathcal{N}_{\text{A}} = 0,74 \times \frac{a^3 M}{8mr^3} = 0,74 \times \frac{M}{8m} \times \left(\frac{a}{r}\right)^3$$

L'application numérique donne $6 \cdot 10^{23}\,\text{mol}^{-1}$, ce qui est remarquable : l'ordre de grandeur obtenu est excellent.