13

Probabilités

13.1 Espaces probabilisés

13.1.1 Univers et événements

Définition 1

Soit Ω un ensemble fini.
• On dit que c'est un univers lorsqu'on le voit comme ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire.
• Les parties $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, i.e. $A \subset \Omega$, sont alors appelées des événements.
• Les singletons $A = \{a\}$ sont appelés des événements élémentaires.
• Pour tout événement $A \in \mathcal{P}(E)$, $\overline{A} = \Omega \setminus A$ est appelé l'événement contraire de A. Il est réalisé si l'événement A n'est pas réalisé.
• L'ensemble vide $\emptyset$ est appelé l'événement impossible et Ω l'événement certain.
• Soient A et B deux événements. On dit que A implique B si $A \subset B$.
• Soient A et B deux événements.
L'événement $A \cup B$, dit A ou B, est réalisé si l'événement A ou l'événement B est réalisé.
L'événement $A \cap B$, dit A et B, est réalisé si l'événement A et l'événement B sont réalisés.
Les événements A et B sont dits incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.

Remarque 1. • Rappelons que si Ω est un ensemble fini, l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω l'est également et comporte $2^{\text{card}(\Omega)}$ éléments.

• Un événement et son événement contraire sont toujours incompatibles.

• Rappelons les règles suivantes, déjà vues :

Pour tout $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$, $\overline{\overline{A}} = A$; $\quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Exemple 1. • Pour modéliser un lancé de dé à 6 faces, on choisit l'univers $\Omega = [\![1, 6]\!]$. On a alors $\text{Card}(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^6 = 64$.

Pour citer quelques exemples, l'événement $\{1, 3, 5\}$ traduit « on lance le dé et l'on obtient un nombre impair » ; l'événement $\{3, 6\}$ traduit « on lance le dé et l'on obtient un multiple de 3 », etc..

Soient $A = \{2\}$ et $B = \{2, 4, 6\}$. L'événement A implique l'événement B puisque $A \subset B$. Autrement dit, si le résultat du lancer de dé est un 2, cela implique que le résultat est pair.

Si $C = \{1, 3, 5\}$, les événements B et C sont incompatibles puisque $B \cap C = \emptyset$. Autrement dit, le résultat ne peut être à la fois pair et impair. Ceci est logique puisque $C = \overline{B}$.

• Pour modéliser une expérience où on lance deux fois une pièce de monnaie, on considère l'univers $\Omega = \{P, F\}^2$ qui contient 4 éléments . L'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ contient alors $2^4 = 16$ éléments.

Par exemple, l'événement $\{(P, P), (P, F)\}$ traduit « on obtient pile au premier lancer ».

Définition 2: Système complet d'événements

Soit Ω un ensemble fini.
Soient $A_1, \ldots, A_n$ des parties de Ω.
On dit que les événements $(A_1, \ldots, A_n)$ forment un système complet d'événements pour Ω s'ils vérifient les deux conditions suivantes :

1. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$;
2. $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$.

Un système complet d'événements pour Ω est donc une famille d'événements deux à deux incompatibles dont la réunion est l'ensemble Ω. On dit aussi que ces événements forment une partition de Ω.

Exemple 2.
1. Si $\Omega = \{x_k | k \in [\![1,n]\!]\}$ est un ensemble fini, alors la famille $(\{x_k\})_{1 \leqslant k \leqslant n}$ forme un sytème complet d'événements.
2. Si $A \subset \Omega$ est un événement, alors la famille $(A, \overline{A})$ forme un système complet d'événements.
3. Soit $\Omega = [\![1,6]\!]$. Soient $A = \{1,4,5\}$, $B = \{2,3\}$ et $C = \{6\}$. Les événements (A,B,C) forment un système complet d'événements pour Ω.

13.1.2 Probabilité

Définition 3: Probabilité

Soit Ω un ensemble fini.
On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ une application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$ telle que

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
2. Pour toute famille $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ d'événements deux à deux incompatibles,
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k).$$

On appelle espace probabilisé fini un triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ où Ω est un ensemble fini et $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Remarque 2. Si $(A_1, \ldots, A_n)$ est un système complet d'événements pour Ω, on a alors
$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$$
où on a utilisé les deux propriétés d'une probabilité, les événements $(A_k)_{1 \leqslant \leqslant k \leqslant n}$ étant deux à deux incompatibles.

Remarque 3. Dans le cas où Ω est un ensemble fini, on définit la probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ par
$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}.$$
On dit qu'il s'agit d'une situation d'équiprobabilité.
Vérifions qu'il s'agit bien d'une probabilité.

- On a $\mathcal{P}(\Omega) = \dfrac{\text{card}(\Omega)}{\text{card}(\Omega)} = 1$.

• Soit $(A_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une famille d'événements deux à deux incompatibles, i.e. $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$.

On a vu dans le chapitre « Dénombrement »qu'on a alors $\text{Card}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \text{Card}(A_k)$.

On en déduit que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \frac{\text{Card}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \text{Card}(A_k)}{\text{Card}(\Omega)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\text{Card}(A_k)}{\text{Card}(\Omega)} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k),$$

ce qui prouve bien que $\mathbb{P}$ est une probabilité.

Dans ce cas, pour tout événement élémentaire $\{a\} \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a $\mathbb{P}(\{a\}) = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)}$.

Exemple 3. Reprenons l'exemple du lancer de dé, avec $\Omega = [\![1,6]\!]$. On munit l'espace $(\Omega, \mathbb{P}(\Omega))$ de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$.

Pour tout $k \in \Omega$, on a $\mathbb{P}(\{k\}) = \frac{1}{6}$.

Soit $A = \{1,3,5,6\}$. Alors $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Proposition 1: Propriétés d'une probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. On a les propriétés suivantes :

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
2. $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
3. Pour toutes parties A et B dans $\mathcal{P}(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

4. Pour toutes parties A et B dans $\mathcal{P}(\Omega)$ avec $A \subset B$,

$$\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B).$$

5. Si $A_1, ..., A_n$ sont des parties de $\mathcal{P}(\Omega)$, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$

Démonstration.

1. Soit $A = \emptyset$ et $B = \emptyset$. Les événements A et B sont incompatibles puisque $A \cap B = \emptyset$. De plus, on a également $A \cup B = \emptyset$ donc par définition d'une probabilité

$$\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(\emptyset)$$

d'où en simplifiant par $\mathbb{P}(\emptyset)$ de chaque côté de l'égalité, on obtient $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

2. On a $\Omega = A \cup \overline{A}$ avec A et $\overline{A}$ qui sont incompatibles donc

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A})$$

d'où $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

3. On écrit $A \cup B$ sous la forme d'une union d'événements deux à deux incompatibles :
$$A \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B).$$
Ainsi,
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) + \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B).$$
Par ailleurs, on a les unions disjointes $A = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$ et $B = (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap B)$ donc
$$\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) \text{ et } \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$
Tout mis bout à bout, on obtient :
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$
4. Puisque $A \subset B$, on a $B \cap A = A$.
Ainsi $B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A}) = A \cup (B \cap \overline{A})$.
Ces deux événements étant incompatibles, on a $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap \overline{A})$.
Puisque $\mathbb{P}(B \cap \overline{A}) \geq 0$, on en déduit que
$$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B).$$
5. Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
Si $n = 1$, l'inégalité est triviale.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ telle que l'inégalité est vraie pour n événements.
Considérons $A_1, ..., A_{n+1}$ des éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$.
D'après le troisième alinéa, on a pour tous événements A et $B, \mathbb{P}(A \cup B) \leqslant \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
Ainsi, on a
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}).$$
Or, par hypothèse de récurrence, on a $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$. On en déduit que
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) + \mathbb{P}(A_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_i),$$
ce qui prouve la formule au rang $n+1$ et achève la récurrence.

■

13.2 Conditionnement et indépendance

13.2.1 Probabilités conditionnelles

Définition 4: Probabilité conditionnelle

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.
On considère A et B deux parties dans $\mathcal{P}(\Omega)$ telles que $\mathbb{P}(B) > 0$.
On appelle probabilité conditionnelle de A sachant B le réel
$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$
On note également $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B)$.

On a directement d'après la définition la formule dite de conditionnement :

Proposition 2: Formule de conditionnement

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.
On considère A et B deux parties dans $\mathcal{P}(\Omega)$ telles que $\mathbb{P}(B) > 0$.
Alors
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A).$$

Exemple 4. • On lance un dé à 6 faces. On suppose que chaque résultat est équiprobable.
Soit $\Omega = [\![1, 6]\!]$. On munit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$.
Calculons la probabilité que le résultat du lancer de dé soit 5 sachant qu'il est impair.
Soit $A = \{5\}$, soit $B = \{1, 3, 5\}$. La probabilité qu'on souhaite calculer est

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}.$$

Calculons maintenant la probabilité que le résultat du lancer de dé soit 4 sachant qu'il est impair.
Soit $C = \{4\}$. La probabilité qu'on souhaite calculer est

$$\mathbb{P}_B(C) = \frac{\mathbb{P}(C \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(\emptyset)}{\mathbb{P}(B)} = 0.$$

• Un couple a deux enfants. Sachant que l'un des enfants est un garçon, quelle est la probabilité que l'autre soit une fille ? On suppose que la naissance de garçons et de filles est équiprobable.
Considérons l'univers $\Omega = \{(F, F), (F, G), (G, F), (G, G)\}$. On munit $(\Omega, \mathbb{P}(\Omega))$ de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$.
Soit $A = \{(F, F), (F, G), (G, F)\}$ l'événement ≪ le couple a une fille ≫et $B = \{(F, G), (G, F), (G, G)\}$ l'événement ≪ le couple a un garçon ≫.
On souhaite calculer $\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\mathbb{P}(\{(F, G), (G, F)\})}{\mathbb{P}(\{(F, G), (G, F), (G, G)\})} = \dfrac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{4}} = \dfrac{2}{3}.$

Proposition 3

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(B) > 0$.
L'application

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0, 1] \\ \mathbb{P}_B : A & \longmapsto & \mathbb{P}_B(A) \end{array}$$

est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Démonstration. Observons déjà que $\mathbb{P}_B$ est à valeurs dans $[0, 1]$.
En effet, pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $A \cap B \subset B$ donc $0 \leqslant \mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \mathbb{P}(B)$ d'où

$$0 \leq \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \leq 1.$$

Vérifions maintenant les deux axiomes de la définition d'une probabilité.

1. $\mathbb{P}_B(\Omega) = \dfrac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1.$

2. Soient $(A_1, \dots, A_n)$ des événements deux à deux incompatibles.
Ainsi, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j$, on a $(A_i \cap B) \cap (A_j \cap B) = (A_i \cap A_j) \cap B = \emptyset$ donc les événements $(A_k \cap B)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ sont deux à deux incompatibles d'où

$$\mathbb{P}_B\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cap B\right)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} (A_k \cap B)\right)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbb{P}(A_k \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_B(A_k),$$

ce qui prouve bien que $\mathbb{P}_B$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

■

Remarque 4. A fortiori, les probabilités conditionelles vérifient les mêmes propriétés qu'une probabilité, à savoir :

$$\mathbb{P}_B(\emptyset) = 0; \quad \mathbb{P}_B(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}_B(A); \quad \mathbb{P}_B(A \cup C) = \mathbb{P}_B(A) + \mathbb{P}_B(C) - \mathbb{P}_B(A \cap C);$$

$$\text{si } A \subset C, \mathbb{P}_B(A) \leqslant \mathbb{P}_B(C) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_B\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_B(A_i).$$

Proposition 4: Formule des probabilités composées

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.
Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$. Alors

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Démonstration. Observons tout d'abord que toutes les probabilités conditionnelles sont bien définies.

En effet, l'hypothèse $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$ implique que pour tout $1 \leq k \leq n-1$,

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_k) > 0$$

car $A_1 \cap \dots \cap A_{n-1} \subset A_1 \cap \dots \cap A_k$.

La formule se montre alors directement :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n) &= \mathbb{P}(A_1)\frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathbb{P}(A_1)}\frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)} \dots \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n)}{\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})} \\ &= \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n). \end{aligned}$$

■

Exemple 5. Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On tire successivement et sans remise n boules dans cette urne. Les tirages sont équiprobables.

On note A l'événement « toutes les boules tirées sont blanches ».

Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on appelle A_k l'événement « la boule tirée au k-ème tirage est blanche ».

Alors $A = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$ et d'après la formule des probabilités composées, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n) \\ &= \frac{n}{2n}\frac{n-1}{2n-1}\frac{n-2}{2n-2} \dots \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{(n!)^2}{(2n)!}. \end{aligned}$$

Proposition 5: Formule des probabilités totales

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.
Soit $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ un système complet d'événements.
Alors pour tout $B \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B),$$

avec la convention $\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B) = 0$ si $\mathbb{P}(A_i) = 0$.

Démonstration. Soit $B \in \mathcal{P}(\Omega)$. On a

$$B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i),$$

où les événements $(B \cap A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont deux à deux incompatibles car les événements $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ le sont.

Par définition d'une probabilité, on a donc

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B \cap A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_i).$$

La conclusion découle du fait que pour tout $i \in [\![1, n]\!], \mathbb{P}(B \cap A_i) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)$ (si $\mathbb{P}(A_i) > 0$, ceci découle de la formule de conditionnement, sinon, de la convention ci-dessus). ■

Exemple 6. Trois urnes U_1, U_2 et U_3 ont la composition suivante : U_1 contient une boule blanche et une boule noire, U_2 contient trois boules blanches et deux boules noires, U_3 contient deux boules blanches et deux boules noires.

On choisit une urne au hasard puis on tire une boule dans l'urne. Quelle est la probabilité de tirer une boule noire ?

On considère les événements U_1 :≪ on choisit l'urne U_1 ≫, U_2 :≪ on choisit l'urne U_2 ≫, U_3 :≪ on choisit l'urne U_3 ≫et N :≪ la boule tirée est noire ≫.

Les événements (U_1, U_2, U_3) forment un système complet d'événements et d'après la formule des probabilités totales, on a

$$\mathbb{P}(N) = P(U_1)\mathbb{P}_{U_1}(N) + P(U_2)\mathbb{P}_{U_2}(N) + P(U_3)\mathbb{P}_{U_3}(N) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{15}.$$

Proposition 6: Formule de Bayes

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.
Soit $(A_1, \dots, A_n)$ un système complet d'événements de Ω. Soit B un événement tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$.
Alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\mathbb{P}_B(A_i) = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)}{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(B)}.$$

Démonstration. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. D'après la formule de conditionnement, on a

$$\mathbb{P}_B(A_i) = \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

D'autre part, d'après la formule des probabilités totales, on a $\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(B)$, d'où le résultat. ■

Corollaire 1

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.
Soient A et B dans $\mathcal{P}(\Omega)$ tels que $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$. Alors

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}_{\overline{A}}(B)}.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la formule de Bayes au système complet d'événements $(A, \overline{A})$. ■

Exemple 7. Une maladie touche $0,01\%$ de la population. On dispose d'un test.

Pour les personnes atteintes, il est positif avec probabilité 99%.

Pour les persones saines, il est négatif avec probabilité 99%.

On suppose qu'une personne est testée positive. Quelle est la probabilité qu'elle soit effectivement malade ?

Il s'agit ici de calculer $\mathbb{P}_B(A)$ où l'événement A traduit le fait que la personne est malade, et l'événement B traduit le fait que le test est positif.

On alors

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}_{\overline{A}}(B)} = \frac{0,0001 \times 0,99}{0,0001 \times 0,99 + 0,9999 \times 0,01} \simeq 0,01.$$

13.2.2 Indépendance d'événements

Définition 5: Événements indépendants

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.
Deux événements A et B sont dits indépendants si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Remarque 5. Si $\mathbb{P}(B) > 0$, l'indépendance de A et B équivaut à dire que

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A).$$

Proposition 7

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.
Soient A et B deux événements indépendants.
Alors les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Démonstration. En effet, on a

$$\mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B) = (1 - \mathbb{P}(A))\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B),$$

car $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B)$ par indépendance de A et B.

Or, B s'écrit comme l'union de deux événements incompatibles $B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$ d'où

$$\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\overline{A} \cap B),$$

donc $\mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$, ce qui implique l'indépendance de $\overline{A}$ et B. ■

Remarque 6.
1. On en déduit le corollaire suivant : si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont également, ainsi que $\overline{A}$ et $\overline{B}$.
2. A est indépendant avec lui même si et seulement si $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A)^2$ si et seulement si $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$.
3. Si A et B sont incompatibles et indépendants, on a $0 = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ donc ceci n'est possible que si l'un des deux nombres $\mathbb{P}(A)$ ou $\mathbb{P}(B)$ est nul.

Définition 6: Événements mutuellement indépendants

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini
Soit $(A_1, \dots, A_n)$ une famille d'événements de $\mathcal{P}(\Omega)$.

1. On dit que les événements $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ sont deux à deux indépendants si pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i \neq j$, alors
$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j).$$
2. On dit que les événements $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ sont mutuellement indépendants si pour tout $I \subset [\![1, n]\!]$, on a
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\in I} A_k\right) = \prod_{k\in I} \mathbb{P}(A_k).$$

Remarque 7. D'après la définition, si on dispose d'une famille d'événements mutuellement indépendants, alors ces événements sont deux à deux indépendants mais la réciproque est fausse, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 8. On lance deux dés à 6 faces (équilibrés) D_1 et D_2. On suppose que les lancers sont indépendants.

On pose $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$ et on munit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$.

On considère les événements A : « le résultat de D_1 est pair », B : « le résultat de D_2 est pair »et C : « la somme des résultats de D_1 et D_2 est pair. »

Les événements A et B sont indépendants puisque les lancers sont indépendants. On a $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \dfrac{1}{2}$ et $C = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$ donc

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(\overline{B}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

On a $A \cap C = A \cap B$ donc $\mathbb{P}(A \cap C) = \dfrac{1}{4} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$, donc les événements A et C sont indépendants. On montre de même que les événéments B et C sont indépendants.

Donc les événements A, B et C sont deux à deux indépendants.

En revanche, on a $A \cap B \cap C = A \cap B$ donc

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C).$$

Ainsi, les événements A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants.