Liste d'exercices n°13 — Probabilités

Exercice 1. Soit Ω un ensemble fini. Soient A, B et C trois parties de Ω. Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω.
Montrer que

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).$$

Exercice 2. Soit $E := \{1, 2, 7, 42\}$.

1. Ecrire l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E.
2. Est-ce que 2 est un élément de $\mathcal{P}(E)$? L'ensemble vide appartient-il à $\mathcal{P}(E)$?
3. Soit $A := \{\{1, 2\}, \{42\}\}$. A-t-on $A \subseteq \mathcal{P}(E)$?
   Même question avec $B = \{\{1\}, \{42\}, \emptyset\}$.

Exercice 3. Soient A, B, C trois événements d'un espace probabilisé. Exprimer les événements suivants :

1. Aucun des événements A, B, C n'est réalisé.
2. Un seul des trois événements est réalisé.
3. Au moins deux des trois événements sont réalisés.
4. Au plus deux des trois événements sont réalisés.

Exercice 4. Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On en tire une au hasard. Les événements « tirer un nombre pair »et « tirer un multiple de 3 »sont-ils indépendants ? La réponse change t-elle s'il y a 13 boules ?

Exercice 5. Alice propose à Bob le jeu suivant : il tire 5 cartes au hasard dans un jeu de 52 cartes. Si l'as de pique figure parmi les cartes, il a gagné.

1. Quelle est la probabilité que Bob gagne ?
2. Alice essaie de tricher en retirant 10 cartes au hasard du jeu. Quelle est maintenant la probabilité que Bob gagne ?

Exercice 6. Alice et Bob, qui sont colocataires, jouent chaque jour à pile ou face pour décider qui fait la vaisselle. Alice sait que Bob triche 30% du temps en utilisant une pièce truquée qui lui permet de gagner avec 75% de chances.

1. Quelle est la probabilité que Bob gagne un jour donné ?
2. Il gagne 7 jours d'affilée. Quelle est la probabilité qu'il ait triché au moins une fois ?

Exercice 7. Soit n un entier naturel non nul. On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n telles que pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, la boîte numéro k contienne k boules numérotées de 1 à k.
On choisit une boîte au hasard et on tire une boule de cette boîte.
Calculer la probabilité que la boule tirée porte le numéro de la boîte dont on l'a extraite.

Exercice 8. À l'instant 0, une urne contient une boule rouge et une boule verte et on effectue une succession de tirages définis par la règle suivante : on tire une boule de l'urne au hasard et on la remet dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur (on dispose en réserve d'une infinité de boules rouges et vertes). On note S_n le nombre de boules rouges au temps $n \geq 0$. Prouver que pour tout $n \geq 0$ et tout $k \in \{1, \dots, n+1\}$ on a

$$P(S_n = k) = \frac{1}{n+1}.$$

Exercice 9. La classe de BCPST1 du Lycée Fénelon comporte 47 élèves.
Quelle est la probabilité qu'au moins deux élèves partagent le même jour d'anniversaire ?
(Cette année, Nour et Amandine, Rayan et Lubnaa, Yasmé et Nina sont nés le même jour, Emile et Marie aussi mais pas de la même année, tout comme Mathurin et Terence, et Sibel et Apolline !)