BCPST1
A. Panetta

Programme de colles 14 **Semaine du 20/01**

Questions de cours

Matrices

1. Pour tout $(A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), (AB)^T = B^T A^T$.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il existe une unique matrice symétrique S et une unique matrice antisymétrique A telles que $M = S + A$.
3. Unicité de l'inverse (si existence).
4. Si A et B sont inversibles, alors $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
5. Si A est inversible, alors A^T est inversible et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
6. Pour tout $(A,B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})^2, \det(AB) = \det(A)\det(B)$.
7. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
   La matrice A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$ et dans ce cas
   $$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$
8. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible $\Leftrightarrow$ pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, l'équation $AX = B$ admet une unique solution dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \mathrm{rg}(A) = n$.

Probabilités

$(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est un espace probabilisé fini.

1. Pour tout $(A,B) \in (\mathcal{P}(\Omega))^2, \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
2. Si $\mathbb{P}(B) > 0$, alors $\mathbb{P}_B$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.
3. Formule des probabilités composées.
4. Formule des probabilités totales.
5. Si A et B sont des événements indépendants, alors $\overline{A}$ et B le sont également.

Exercices

Matrices

Opérations sur les matrices (sommes, produits). Calcul de puissances d'une matrice, notamment en utilisant la formule du binôme de Newton. Transposée d'une matrice, matrices symétriques/antisymétriques. Détermination du rang d'une matrice. Matrices inversibles. Détermination de l'inverse le cas échéant (par la formule dans le cas de matrices $(2,2)$, par la méthode du pivot de Gauss sinon). Lien entre solutions d'un système et matrice inversible.

Probabilités

Situations simples de dénombrement. Utilisation des formules de cours (probabilités composées, probabilités totales, Bayes...). Indépendance d'événements (deux à deux et mutuelle).