Corrigé du devoir maison n°9

Exercice 1 : Matrices de rotation

1. $R(0) = \begin{pmatrix} \cos(0) & -\sin(0) \\ \sin(0) & \cos(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{R(0) = I_2}$.

   De même, $R(\pi) = \begin{pmatrix} \cos(\pi) & -\sin(\pi) \\ \sin(\pi) & \cos(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{R(0) = -I_2}$.

2. Soient $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$. On a les équivalences suivantes :

   $$R(\theta) = R(\theta') \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta') & -\sin(\theta') \\ \sin\theta') & \cos(\theta') \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \cos(\theta) & = & \cos(\theta') \\ \sin(\theta) & = & \sin(\theta') \end{array} \right.$$

   d'où finalement $\boxed{R(\theta) = R(\theta') \Leftrightarrow \theta \equiv \theta'[2\pi].}$

3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. La matrice $R(\theta)$ est symétrique si $R(\theta)^T = R(\theta)$. Or, on a les équivalences :

   $$R(\theta)^T = R(\theta) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \sin(\theta) = -\sin(\theta) \Leftrightarrow \sin(\theta) = 0$$

   donc $\boxed{R(\theta) \text{ est symétrique si et seulement si } \theta \equiv 0[\pi].}$

4. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. La matrice $R(\theta)$ est antisymétrique si $R(\theta)^T = -R(\theta)$. Or, on a les équivalences :

   $$R(\theta)^T = -R(\theta) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \cos(\theta) = -\cos(\theta) \Leftrightarrow \cos(\theta) = 0$$

   donc $\boxed{R(\theta) \text{ est antisymétrique si et seulement si } \theta \equiv \frac{\pi}{2}[\pi].}$

5. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a $\det(R(\theta)) = \cos(\theta)\cos(\theta) - \sin(\theta)(-\sin(\theta)) = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)$ donc $\boxed{\det(R(\theta)) = 1}$.

   Puisque $\det(R(\theta)) \neq 0$, on en déduit que $R(\theta)$ est inversible et

   $$R(\theta)^{-1} = \frac{1}{\det(R(\theta))} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = R(\theta)^T.$$

   D'autre part, puisque $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ et $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$, on remarque que

   $$R(\theta)^T = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = R(-\theta).$$

   Ainsi, on a bien $\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R}, R(\theta)^{-1} = R(-\theta) = R(\theta)^T.}$

6. Soient $(\theta,\theta')\in\mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} R(\theta)R(\theta') &= \begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\theta') & -\sin(\theta')\\ \sin(\theta') & \cos(\theta')\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\cos(\theta)\cos(\theta')-\sin(\theta)\sin(\theta') & -\sin(\theta')\cos(\theta)-\sin(\theta)\cos(\theta')\\ \sin(\theta)\cos(\theta')+\sin(\theta')\cos(\theta) & \cos(\theta)\cos(\theta')-\sin(\theta)\sin(\theta')\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta')\\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta')\end{pmatrix}\\ &= R(\theta+\theta'). \end{aligned}$$

De même, $R(\theta')R(\theta)=R(\theta'+\theta)=R(\theta+\theta')$ donc $\boxed{\forall(\theta,\theta')\in\mathbb{R}^2, R(\theta)R(\theta')=R(\theta')R(\theta)=R(\theta+\theta').}$

7. • Montrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}, R(\theta)^n=R(n\theta)$.
Pour $n=0$, on a $R(\theta)^0=I_2=R(0)$ donc la propriété est vraie au rang $n=0$.
Soit $n\in\mathbb{N}$ fixé tel que $R(\theta)^n=R(n\theta)$. Alors on a

$$R(\theta)^{n+1}=R(\theta)^nR(\theta)=R(n\theta)R(\theta)=R(n\theta+\theta)=R((n+1)\theta),$$

ce qui prouve la formule au rang $n+1$ et achève la récurrence.
• Etendons la formule aux entiers $n<0$. Soit $n<0$. On a $-n>0$ et par définition, puisque $R(\theta)$ est inversible

$$R(\theta)^n=(R(\theta)^{-1})^{-n}=(R(-\theta))^{-n}=R(-n(-\theta))=R(n\theta).$$

Ainsi, $\boxed{\forall n\in\mathbb{Z}, R(\theta)^n=R(n\theta).}$

8. Soit $\theta\not\equiv 0[\pi]$.

(a) Soit $X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$. On a

$$\begin{aligned} R(\theta)X=e^{i\theta}X &\Leftrightarrow \begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=e^{i\theta}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix}\cos(\theta)x-\sin(\theta)y\\ \sin(\theta)x+\cos(\theta)y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{i\theta}x\\ e^{i\theta}y\end{pmatrix}\\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}(\cos(\theta)-e^{i\theta})x-\sin(\theta)y &=& 0\\ \sin(\theta)x+(\cos(\theta)-e^{i\theta})y &=& 0\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}-i\sin(\theta)x-\sin(\theta)y &=& 0\\ \sin(\theta)x-i\sin(\theta)y &=& 0\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}-ix-y &=& 0\\ x-iy &=& 0\end{array}\right. \text{car } \theta\not\equiv 0[\pi] \text{ donc } \sin(\theta)\neq 0\\ &\Leftrightarrow y=-ix. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } R(\theta)X=e^{i\theta}X \text{ est } \left\{X=\begin{pmatrix}x\\ -ix\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}\right\}.}$$

(b) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$. On a

$$\begin{aligned}
R(\theta)X = e^{-i\theta}X \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{-i\theta} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \cos(\theta)x - \sin(\theta)y \\ \sin(\theta)x + \cos(\theta)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\theta}x \\ e^{-i\theta}y \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (\cos(\theta) - e^{-i\theta})x - \sin(\theta)y &= 0 \\ \sin(\theta)x + (\cos(\theta) - e^{-i\theta})y &= 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} i\sin(\theta)x - \sin(\theta)y &= 0 \\ \sin(\theta)x + i\sin(\theta)y &= 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} ix - y &= 0 \\ x + iy &= 0 \end{cases} \quad \text{car } \theta \not\equiv 0[\pi] \text{ donc } \sin(\theta) \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad y = ix.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } R(\theta)X = e^{i\theta}X \text{ est } \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ ix \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}. \right\}}$$

(c) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$.

On a $\det(P) = 1 \times i - (-i) \times 1 = i + i = 2i \neq 0$ donc P est inversible et

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

En utilisant le fait que $\frac{1}{i} = -i$, on trouve $\boxed{P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}}$.

Enfin, on a

$$\begin{aligned}
P^{-1}R(\theta)P &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos(\theta) + i\sin(\theta) & -\sin(\theta) + i\cos(\theta) \\ \cos(\theta) - i\sin(\theta) & -\sin(\theta) - i\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\cos(\theta) + 2i\sin(\theta) & 0 \\ 0 & 2\cos(\theta) - 2i\sin(\theta) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\theta) + i\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \cos(\theta) - i\sin(\theta) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

donc $\boxed{P^{-1}R(\theta)P = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}}$.

Exercice 2 : Trace d'une matrice

1. $\boxed{\mathrm{Tr}(0_n) = \sum_{k=1}^{n} 0 = 0}$ et $\boxed{\mathrm{Tr}(I_n) = \sum_{k=1}^{n} 1 = n}$.
2. On a $MN = \begin{pmatrix} -13 & 6 & 16 \\ 5 & 31 & 44 \\ -2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ et $NM = \begin{pmatrix} 14 & 41 & -5 \\ 7 & 0 & 7 \\ -17 & -21 & 7 \end{pmatrix}$.

On a $\mathrm{Tr}(MN) = -13 + 31 + 3 = 21$ et $\mathrm{Tr}(NM) = 14 + 0 + 7 = 21$ donc

$$\boxed{\mathrm{Tr}(MN) = \mathrm{Tr}(NM).}$$

3. (a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a

$$\mathrm{Tr}(A^T) = \sum_{i=1}^{n} (A^T)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

d'où $\boxed{\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{Tr}(A^T) = \mathrm{Tr}(A).}$

(b) Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\mathrm{Tr}(\lambda A + \mu B) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda A + \mu B)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \lambda a_{i,i} + \mu b_{i,i} = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \mu \sum_{i=1}^{n} b_{i,i}$$

d'où $\boxed{\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \mathrm{Tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \mathrm{Tr}(A) + \mu \mathrm{Tr}(B).}$

(c) Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. On a

$$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,i} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{j,i} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} (BA)_{j,j} = \mathrm{Tr}(BA).$$

Ainsi, $\boxed{\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA).}$

(d) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. D'après la question précédente, on a

$$\mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{Tr}((P^{-1}A)P) = \mathrm{Tr}(P(P^{-1}A))$$

d'où $\boxed{\mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{Tr}(A).}$

4. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On a $\mathrm{Tr}(A) = a + d$ et $\det(A) = ad - bc$ d'où

$$\begin{aligned} A^2 - \mathrm{Tr}(A)A + \det(A)\mathrm{I}_2 &= \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (a+d)a & (a+d)b \\ (a+d)c & (a+d)d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d'où $\boxed{\forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), A^2 - \mathrm{Tr}(A)A + \det(A)\mathrm{I}_2 = 0_2.}$