Lycée Fénelon
Année 2024-2025

BCPST1
A. Panetta

Corrigé du devoir surveillé de mathématiques n°4
Samedi 18 janvier 2025 (4h00)

Exercice 1 : Suites arithmétiques

1.
```
def raison(L,r):
    for k in range(len(L)-1):
        if L[k+1]-L[k]!=r:
            return False
    return True
```

2.
```
def estArithmetique(L):
    r=L[1]-L[0]
    if raison(L,r):
        return r
    return('Pas arithmétique')
```

Exercice 2 : Une famille de matrices

1. Soient a et b deux réels.
   • Si $a = b$, on a clairement $M(a) = M(b)$.
   • Réciproquement, si $M(a) = M(b)$, alors $(M(a))_{1,2} = (M(b))_{1,2}$ d'où $a = b$.
   On a donc bien montré que $\boxed{M(a) = M(b) \Leftrightarrow a = b.}$
2. On a $\boxed{M(0) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = I_3.}$
3. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a
$$\begin{aligned} M(a)M(b) &= \begin{pmatrix}1-2a & a & a\\ a & 1-2a & a\\ a & a & 1-2a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-2b & b & b\\ b & 1-2b & b\\ b & b & 1-2b\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1-2(a+b-3ab) & a+b-3ab & a+b-3ab\\ a+b-3ab & 1-2(a+b-3ab) & a+b-3ab\\ a+b-3ab & a+b-3ab & 1-2(a+b-3ab)\end{pmatrix}\end{aligned}$$
   d'où $\boxed{M(a)M(b) = M(a+b-3ab).}$
4. Soit $a \in \mathbb{R}$.
   On a $a + b - 3ab = 0 \Leftrightarrow b(3a-1) = a$.
   • Si $a \neq \dfrac{1}{3}$, on a $a + b - 3ab = 0 \Leftrightarrow b = \dfrac{a}{3a-1}$.
   On a alors $M(a)M\left(\frac{a}{3a-1}\right) = M(a + \frac{a}{3a-1} - a\frac{3a}{3a-1}) = M(0) = I_3$ donc si $a \neq \dfrac{1}{3}$, $M(a)$ est inversible et son inverse est $M(a)^{-1} = M\left(\frac{a}{3a-1}\right)$.

- Si $a = \dfrac{1}{3}$, $M(\frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc la matrice $M(\frac{1}{3})$ est de rang $1 \neq 3$, ce qui prouve que $M(\frac{1}{3})$ n'est pas inversible.

Finalement, $\boxed{M(a) \text{ est inversible si seuelement si } a \neq \dfrac{1}{3} \text{ et dans ce cas, } M(a)^{-1} = M\left(\dfrac{a}{3a-1}\right).}$

5. (a) Soit $a_0 \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} M(a_0)^2 = M(a_0) &\Leftrightarrow M(2a_0 - 3a_0^2) = M(a_0) \quad \text{d'après 3)} \\ &\Leftrightarrow 2a_0 - 3a_0^2 = a_0 \quad \text{d'après 1)} \\ &\Leftrightarrow a_0 - 3a_0^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow a_0(1 - 3a_0) \\ &\Leftrightarrow a_0 = 0 \quad \text{ou} \quad a_0 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Ainsi, le seul réel a_0 non nul tel que $M(a_0)^2 = M(a_0)$ est $\boxed{a_0 = \dfrac{1}{3}.}$

(b) On a $B = M(a_0) = M(\frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $C = I_3 - B = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

D'après la question précédente, $\boxed{B^2 = M(a_0)^2 = M(a_0) = B.}$

Ensuite, on a $BC = B(I_3 - B) = B - B^2 = 0$ d'où $\boxed{BC = 0.}$

De même, $CB = (I_3 - B)B = B - B^2$ d'où $\boxed{CB = 0.}$

Enfin, $C^2 = (I_3 - B)^2 = I_3 - 2B + B^2 = I_3 - 2B + B = I_3 - B$ d'où $\boxed{C^2 = C.}$

6. Soit $a \in \mathbb{R}$.

(a) On a

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} + (1-3a) \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

donc $M(a) = B + \alpha C$ pour $\boxed{\alpha = 1 - 3a.}$

(b) D'après la question 5.b), les matrices B et αC commutent puisque

$$B(\alpha C) = \alpha BC = (\alpha C)B = 0$$

donc d'après la formule du binôme de Newton, on a pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$:

$$M(a)^n = (B+(1-3a)C)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k((1-3a)C)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-3a)^{n-k} B^k C^{n-k}.$$

Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $B^k C^{n-k} = B^{k-1}(BC)C^{n-k-1}$ avec $k-1 \geqslant 0$ et $n-k-1 \geqslant 0$.
Puisque $BC = 0$, on en déduit que pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $B^k C^{n-k} = 0$.
Ainsi, dans la somme ci-dessus, seuls les termes pour $k = 0$ et $k = n$ sont non nuls et on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M(a)^n = B^n + (1-3a)^n C^n$.
Or, d'après la question 5.b), $B^2 = B$ et $C^2 = C$ donc, par une récurrence immédiate, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B^n = B$ et $C^n = C$.
Ainsi, $M(a)^0 = I_3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M(a)^n = B + (1-3a)^n C$, i.e.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, M(a)^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+2(1-3)^n & 1-(1-3)^n & 1-(1-3)^n \\ 1-(1-3)^n & 1+2(1-3)^n & 1-(1-3)^n \\ 1-(1-3)^n & 1-(1-3)^n & 1+2(1-3)^n \end{pmatrix}.}$$

Exercice 3 : Un système différentiel

1. On a pour tout réel t

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1'(t) & = & -3x_1(t)+8x_2(t) \\ x_2'(t) & = & -2x_1(t)+5x_2(t) \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow X'(t) = AX(t)$$

avec $\boxed{A = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.}$

2. (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$A - \lambda I_2 \text{ n'est pas inversible} \Leftrightarrow \det(A-\lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -3-\lambda & 8 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

d'où $(-3-\lambda)(5-\lambda)+16 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 1.}$

(b) Soit $U = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. On a les équivalences :

$$AU = U \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} -3a+8b & = & a \\ -2a+5b & = & b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} -4a+8b & = & 0 \\ -2a+4b & = & 0 \end{array}\right.$$

d'où $a = 2b$. Finalement, les matrices $U \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telles que $AU = U$ sont

$$\boxed{\left\{U = \begin{pmatrix} 2b \\ b \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R}\right\}}.$$

3. On a $\det(P) = -1$. Puisque $P^{-1} = \dfrac{1}{\det(P)} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, on en déduit que $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.}$

4. On calcule :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où $\boxed{P^{-1}AP = T.}$

5. (a) Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = Y(t) = P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_1(t) - 2x_2(t) \end{pmatrix}$ d'où

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1(t) & = & x_2(t) \\ y_2(t) & = & x_1(t) - 2x_2(t) \end{array}\right. .$$

On a alors

$$P^{-1}X'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2'(t) \\ x_1'(t) - 2x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = Y'(t).$$

On a donc bien montré que $\boxed{\text{pour tout } t \in \mathbb{R}, Y'(t) = P^{-1}X'(t).}$
On a montré que $P^{-1}AP = T$ donc $P^{-1}A = TP^{-1}$. Ainsi, pour tout réel t,

$$Y'(t) = P^{-1}X'(t) = P^{-1}AX(t) = TP^{-1}X(t) = TY(t).$$

On a donc bien montré que $\boxed{\text{pour tout } t \in \mathbb{R}, Y'(t) = TY(t).}$

(b) L'égalité matricielle montrée à la question précédente s'écrit sous la forme d'un système : pour tout réel $t, Y'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ donc

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1'(t) & = & y_1(t) - 2y_2(t) \\ y_2'(t) & = & y_2(t) \end{array} \right. .$$

Les solutions de la deuxième équation sont les fonctions

$$\boxed{\left\{ y_2 : t \mapsto \mu e^t, \mu \in \mathbb{R} \right\}.}$$

(c) En injectant dans la première équation, on trouve pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$(E) : y_1'(t) - y_1(t) = -2y_2(t) = -2\mu e^t.$$

On résout d'abord l'équation homogène $(H) : y_1'(t) - y_1(t) = 0$ dont les solutions sont les fonctions $y_1 : t \mapsto \lambda e^t$, où λ est une constante réelle.
On résout ensuite (E) en utilisant la méthode de variation de la constante.
Soit y_1 définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $y_1(t) = \lambda(t)e^t$ où $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable.
On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} y_1'(t) - y_1(t) = 2\mu e^t & \Leftrightarrow (\lambda'(t) + \lambda(t))e^t - \lambda(t)e^t = -2\mu e^t \\ & \Leftrightarrow \lambda'(t) = -2\mu \\ & \Leftrightarrow \lambda(t) = -2\mu t + \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ & \Leftrightarrow y_1(t) = \lambda e^t - 2\mu t e^t. \end{aligned}$$

Ainsi, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$\boxed{\left\{ y_1 : t \longmapsto \lambda e^t - 2\mu t e^t, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.}$$

(d) Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \lambda e^t - 2\mu t e^t \\ \mu e^t \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$X(t) = PY(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda e^t - 2\mu t e^t \\ \mu e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2\lambda + \mu)e^t - 4\mu t e^t \\ \lambda e^t - 2\mu t e^t \end{pmatrix},$$

où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Il existe donc bien deux constantes $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ telles que pour tout réel t,

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{rcl} x_1(t) & = & (2\lambda + \mu)e^t - 4\mu t e^t \\ x_2(t) & = & \lambda e^t - 2\mu t e^t \end{array} \right. , (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.}$$

On a les équivalences suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1(0) & = & 1 \\ x_2(0) & = & 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2\lambda + \mu & = & 1 \\ \lambda & = & 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \mu & = & -1 \\ \lambda & = & 1 \end{array} \right.$$

L'unique couple de solutions (x_1, x_2) vérifiant $x_1(0) = x_2(0) = 1$ est donc

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{rcl} x_1(t) & = & e^t + 4te^t \\ x_2(t) & = & e^t + 2te^t \end{array} \right. , \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.}$$

Problème 1 : Une suite récurrente linéaire d'ordre 3

Partie I : Calcul des puissances d'une matrice

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que l'équation $AX = \lambda X$ admette une solution non nulle. Cette équation équivaut à $(A - \lambda I_3)X = 0$. Or, pour tout réel λ, cette équation admet la solution nulle et celle-ci est unique si et seulement si $A - \lambda I_3$ est inversible.

   On cherche donc à déterminer les réels λ pour lesquels $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible, c'est à dire les réels λ pour lesquels $\mathrm{rg}(A - \lambda I_3) < 3$.

   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Echelonnons la matrice $A - \lambda I_3$.

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2-\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow 2L_3 - \lambda L_1} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2-\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda & \lambda^2 - 2\lambda \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2-\lambda \\ 0 & -2 & -\lambda^2 + 2\lambda + 1 \\ 0 & 2-\lambda & \lambda^2 - 2\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{2L_3 + (2-\lambda)L_2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2-\lambda \\ 0 & -2 & -\lambda^2 + 2\lambda + 1 \\ 0 & 0 & \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 \end{pmatrix}.$$

   Or, $(\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2)$ donc on a les équivalences

$$\mathrm{rg}(A - \lambda I_3) < 3 \Leftrightarrow \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{1, -1, 2\}.$$

$$\boxed{\text{Les réels cherchés sont donc } 1, -1, \text{ et } 2.}$$

2. (a) On a les équivalences suivantes :

$$AX = X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & x \\ z & = & y \\ -2x + y + 2z & = & z \end{array} \right. \Leftrightarrow x = y = z$$

$$\text{donc } \boxed{\text{l'ensemble des solutions de } AX = X \text{ est } \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}. \right\}}$$

   (b) On a les équivalences suivantes :

$$AX = -X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & -x \\ z & = & -y \\ -2x + y + 2z & = & -z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & -x \\ z & = & x \end{array} \right.$$

$$\text{donc } \boxed{\text{l'ensemble des solutions de } AX = X \text{ est } \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}. \right\}}$$

   (c) On a les équivalences suivantes :

$$AX = 2X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 2x \\ z & = & 2y \\ -2x + y + 2z & = & 2z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 2x \\ z & = & 4x \end{array} \right.$$

$$\text{donc } \boxed{\text{l'ensemble des solutions de } AX = X \text{ est } \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 4x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}. \right\}}$$

3. (a) Echelonnons P en utilisant la méthode du pivot de Gauss afin de déterminer l'inverse de P si P est inversible.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftarrow 3L_2 - L_3}{\overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow \frac{1}{3} L_3]{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{6} L_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right).$$

On voit dès la deuxième étape que P est de rang 3, donc P est inversible et

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

(b) On a

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc $\boxed{P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D.}$

(c) Puisque D est une matrice diagonale, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ d'où

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.}$$

(d) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P^{-1}A^nP = D^n$.

• Pour $n = 0$, on a $P^{-1}A^0P = P^{-1}I_3P = P^{-1}P = I_3 = D^0$, donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $P^{-1}A^nP = D^n$. D'après la question 2.(b), $P^{-1}AP = D$ donc

$$D^{n+1} = D^nD = (P^{-1}A^nP)P^{-1}AP = P^{-1}A^n(PP^{-1})AP = P^{-1}A^nI_3AP = P^{-1}A^{n+1}P,$$

ce qui prouve la formule au rang $n+1$ et achève la récurrence.

On a donc bien montré que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, P^{-1}A^nP = D^n.}$

(e) D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P^{-1}A^nP = D^n$ d'où en multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1} :

$$PD^nP^{-1} = PP^{-1}A^nPP^{-1} = A^n.$$

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
A^n &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & (-1)^n & 2^n \\ 1 & (-1)^{n+1} & 2^{n+1} \\ 1 & (-1)^n & 2^{n+2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6+2((-1)^n - 2^n) & 3(1+(-1)^{n+1}) & -3+(-1)^n+2^{n+1} \\ 6+2((-1)^{n+1} - 2^{n+1}) & 3(1+(-1)^n) & -3+(-1)^{n+1}+2^{n+2} \\ 6+2((-1)^n - 2^{n+2}) & 3(1+(-1)^{n+1}) & -3+(-1)^n+2^{n+3} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6+2((-1)^n - 2^n) & 3(1+(-1)^{n+1}) & -3+(-1)^n+2^{n+1} \\ 6+2((-1)^{n+1} - 2^{n+1}) & 3(1+(-1)^n) & -3+(-1)^{n+1}+2^{n+2} \\ 6+2((-1)^n - 2^{n+2}) & 3(1+(-1)^{n+1}) & -3+(-1)^n+2^{n+3} \end{pmatrix}}$.

Partie II : Etude de la suite

1.
```
def masuite(n):
    U=[-6,0,0]
    for k in range(3,n+1):
        U.append(2*U[-1]+U[-2]-2*U[-3])
    return U[n]
```

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$AX_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ -2u_n + u_{n+1} + 2u_{n+2} \end{pmatrix}.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$ donc

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, AX_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix} = X_{n+1}.}$$

3. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, X_n = A^nX_0$.
   • Pour $n = 0$, on a $A^0X_0 = I_3X_0 = X_0$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
   • Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que $X_n = A^nX_0$. Alors d'après la question précédente,

$$X_{n+1} = AX_n = A(A^nX_0) = A^{n+1}X_0,$$

   ce qui prouve la formule au rang $n+1$.
   On a donc bien montré par récurrence que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, X_n = A^nX_0.}$

4. On a $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

D'après la question précédente et le résultat de la première partie, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6+2((-1)^n - 2^n) & 3(1+(-1)^{n+1}) & -3+(-1)^n+2^{n+1} \\ 6+2((-1)^{n+1} - 2^{n+1}) & 3(1+(-1)^n) & -3+(-1)^{n+1}+2^{n+2} \\ 6+2((-1)^n - 2^{n+2}) & 3(1+(-1)^{n+1}) & -3+(-1)^n+2^{n+3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où, en considérant la première ligne de la matrice obtenue,

$$\boxed{\text{pour tout}\, n \in \mathbb{N}, u_n = -6 + 2(2^n + (-1)^{n+1}).}$$

5. On a pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant -6 + 2(2^n - 1) = 2^{n+1} - 8$.
Or, puisque $2 > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^{n+1} - 8 = +\infty$.
Par comparaison, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty.}$

Problème 2 : Des suites et des logarithmes

Partie I : La série harmonique

1. Posons pour tout $t > -1, f(t) = t - \ln(1+t)$ (ce qui est bien défini car $1 + t > 0$). La fonction f est dérivable sur $]-1, +\infty[$ comme composée de fonctions dérivables et on

$$\forall t > -1, f'(t) = 1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t}.$$

Pour tout $t > -1, 1 + t > 0$ donc le signe de $f'(t)$ est celui de t. Ainsi, pour tout $t \in]-1, 0[, f'(t) < 0$ et pour tout $t > 0, f'(t) > 0$ donc f es strictement décroissante sur $]-1, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
On en déduit que f admet un minimum en 0 donc pour tout $t > -1, f(t) \geqslant f(0) = 0$.
Ainsi, pour tout $t > -1, t - \ln(1+t) \geqslant 0$ donc

$$\boxed{\text{pour tout}\, t > -1, \ln(1+t) \leqslant t.}$$

2. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n+1) - -ln(1)$$

donc $\boxed{\text{pour tout}\, n \in \mathbb{N}^*, T_n = \ln(n+1).}$
Puisque $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} n+1 & = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) & = +\infty \end{cases}$ donc par composition de limites, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(n+1) = +\infty$ d'où $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} T_n = +\infty.}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
En appliquant la première question, on a pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, puisque $\frac{1}{k} > -1$, $\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{k}$.

En sommant cette inégalité, on obtient $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}^*, T_n \leqslant S_n$.

Puisque $\lim_{n\to+\infty} T_n = +\infty$ d'après la question précédente, on en déduit par comparaison que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty.}$

4.
```
def seuil(A):
    S=0
    n=0
    while(S)<=A:
        n+=1
        S+=1/n
    return(n)
```

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$u_{n+1}-u_n = S_{n+1}-\ln(n+1)-S_n+\ln(n) = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}+\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

d'où $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1}-u_n = \frac{1}{n+1}+\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right).}$

Or, pour tout $n \geqslant 1, n+1 \geqslant 2$ donc $-\frac{1}{n+1} \geqslant -\frac{1}{2} > -1$ d'où $\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \leqslant -\frac{1}{n+1}$ d'après la question 1, ce qui implique que pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{1}{n+1}+\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \leqslant 0$, i.e. $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 1, u_{n+1}-u_n \leqslant 0}$, c'est à dire que $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante.}}$

6. D'après le calcul effectué à la question précédente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1}-u_n = \frac{1}{n+1}+\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}-\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

d'où $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1}-u_n = \frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).}$

Montrons alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n \geqslant \frac{1}{n}$.

•**Initialisation :** Pour $n=1$, on a $u_1 = S_1-\ln(1) = \sum_{k=1}^{1}\frac{1}{k} = 1 \geqslant \frac{1}{1}$ donc la propriété est vraie au rang $n=1$.

•**Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $u_n \geqslant \frac{1}{n}$. Montrons que $u_{n+1} \geqslant \frac{1}{n+1}$.
D'après le calcul fait précédemment, on a

$$u_{n+1}-\frac{1}{n+1} = u_n-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Or, par hypothèse de récurrence, $u_n \geqslant \frac{1}{n}$ donc $u_{n+1}-\frac{1}{n+1} \geqslant \frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \geqslant 0$ d'après la question 1 appliquée à $\frac{1}{n} > -1$, ce qui prouve que $u_{n+1} \geqslant \frac{1}{n+1}$.

On a donc bien montré par récurrence que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, u_n \geqslant \frac{1}{n}.}$

7. D'après la question précédente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n \geqslant \dfrac{1}{n} > 0$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée par 0.

   Or, d'après la question 5, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

   D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que la suite $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge.}}$

8. Par définition, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*, S_n = u_n + \ln(n)$ d'où pour tout $n \geqslant 2$ (de telle sorte que $\ln(n) \neq 0$), on a

$$\frac{S_n}{\ln(n)} = \frac{u_n}{\ln(n)} + 1.$$

   Puisque $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n & = \alpha \in \mathbb{R} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) & = +\infty \end{cases}$, on en déduit par quotient de limites que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{\ln(n)} = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{\ln(n)} = 1$, ce qui prouve que $\boxed{S_n \sim \ln(n).}$

Partie II : Une approximation de $\ln(2)$

1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ impair}}}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ impair}}}^{2n} \frac{1}{k} + \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ impair}}}^{2n} \frac{-1}{k}.$$

   Or,

$$\{k \in [\![1;2n]\!],\, k \text{ impair}\} = \{2k+1, k \in [\![0,n-1]\!]\} \quad \text{et} \quad \{k \in [\![1;2n]\!],\, k \text{ pair}\} = \{2k, k \in [\![1,n]\!]\}$$

   d'où $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, A_{2n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}.}$

   On a de même pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2k} = \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ impair}}}^{2n} \frac{1}{k} + \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{1}{k}$$

   d'où, pour la même raison que précédemment, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, S_{2n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}.}$

2. D'après la question précédente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_{2n} - A_{2n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} - \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \right) = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = S_n$$

   d'où $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, A_{2n} = S_{2n} - S_n.}$

3. Par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A_{2n} = S_{2n} - S_n = (u_{2n} + \ln(2n)) - (u_n + \ln(n)) = u_{2n} - u_n + \ln(2) + \ln(n) - \ln(n) = u_{2n} - u_n + \ln(2).$$

   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \gamma \in \mathbb{R}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \gamma$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} - u_n = \gamma - \gamma = 0$.

   On a donc bien, par somme de limites, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} A_{2n} = \ln(2).}$

4. • On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A_{2(n+1)} - A_{2n} = A_{2n+2} - A_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} \geqslant 0$$

donc la suite $(A_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

• On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A_{2(n+1)+1} - A_{2n+1} = A_{2n+3} - A_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+2} \leqslant 0$$

donc la suite $(A_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

• On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_{2n+1} - A_{2n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{1}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} A_{2n+1} - A_{2n} = 0$.

Les trois points précédents justifient que $\boxed{\text{les suites } (A_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ et } (A_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ sont adjacentes.}}$

D'après le théorème des suites adjacentes, on en déduit que la suite $(A_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} A_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} A_{2n} = \ln(2)$.

Puisque $(A_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(A_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers la même limite, ceci implique que $\boxed{\text{la suite } (A_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge}}$ et que $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} A_n = \ln(2).}$

5. Puisque la suite $(A_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et converge vers $\ln(2) = \sup\{A_{2n}, n \in \mathbb{N}^*\}$, on a $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, A_{2n} \leqslant \ln(2).}$

De même, puisque la suite $(A_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers $\ln(2) = \inf\{A_{2n+1}, n \in \mathbb{N}^*\}$, on a $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, A_{2n+1} \geqslant \ln(2).}$

On a donc bien $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, A_{2n} \leqslant \ln(2) \leqslant A_{2n+1}.}$

6. Soit $n \geqslant 1$.

• Si n est pair,il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2k$ et on a d'après la question précédente :

$$|A_n - \ln(2)| = |A_{2k} - \ln(2)| = \ln(2) - A_{2k} \leqslant A_{2k+1} - A_{2k} = \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{n+1}.$$

• Si n est impair, il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$ et on a d'après la question précédente (puisque $A_{2k+2} \leqslant \ln(2)$) :

$$|A_n - \ln(2)| = |A_{2k+1} - \ln(2)| = A_{2k+1} - \ln(2) \leqslant A_{2k+1} - A_{2k+2} = \frac{1}{2k+2} = \frac{1}{n+1}.$$

Dans les deux cas, on a bien $\boxed{\forall n \geqslant 1, |A_n - \ln(2)| \leqslant \dfrac{1}{n+1}.}$

7. Soit $\varepsilon > 0$. D'après la question précédente, pour que $|A_n - \ln(2)| < \varepsilon$, il suffit que $\dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$, ce qui justifie le programme suivant :

```
def approx(epsilon):
    A=0
    n=0
    while 1/(n+1)>epsilon:
        n=n+1
        A=A+((-1)**(n-1))/n
    return A
```