
DEVOIR SURVEILLÉ DE MATHÉMATIQUES N°4
Samedi 18 janvier 2025 (4h00)

L'énoncé est constitué de trois exercices, deux problèmes et comporte 5 pages.

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, la précision et la concision de la rédaction. Le soin de la copie ainsi que l'orthographe entreront également pour une part importante dans l'appréciation du travail rendu.

Les résultats doivent être encadrés.

Si un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 : Suites arithmétiques

1. Ecrire une fonction `raison(L,r)` qui prend en argument une liste de nombres `L` (qui contient au moins deux valeurs) et un nombre réel `r`, et renvoie `True` si les éléments `L` sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison `r`, `False` sinon.
2. Ecrire une fonction `estArithmetique(L)` qui prend en argument une liste `L` (qui contient au moins trois valeurs) et qui renvoie la raison `r` si les termes de la liste sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison `r`, « Pas arithmétique » sinon.

L'exercice 1, ainsi que la question 1 Partie II du problème 1, et les questions 4 Partie I et 7 Partie II du problème 2 compteront pour la note du DS d'informatique.

Exercice 2 : Une famille de matrices

Pour tout réel a , on introduit la matrice $M(a)$ suivante :

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}.$$

1. Soient a et b deux réels. Vérifier que $M(a) = M(b)$ si et seulement si $a = b$.
2. Reconnaître $M(0)$.
3. Montrer que, pour tous réels a et b , on a :

$$M(a)M(b) = M(a+b-3ab).$$

4. En déduire toutes les valeurs de a pour lesquelles la matrice $M(a)$ est inversible. Pour tous ces réels a , exprimer alors l'inverse de $M(a)$.
5. (a) Montrer qu'il existe un unique réel non nul a_0 tel que

$$M(a_0)^2 = M(a_0).$$

Soit a_0 cet unique réel. Considérons alors les matrices suivantes :

$$B = M(a_0) \quad \text{et} \quad C = I_3 - B.$$

- (b) Calculer B^2 , BC , CB et C^2 .
6. Soit a un réel.
 - (a) Montrer qu'il existe un réel α tel que

$$M(a) = B + \alpha C.$$

- (b) Calculer la matrice $M(a)^n$ pour tout entier naturel n .

Exercice 3 : Un système différentiel

On cherche à résoudre le système différentiel

$$(S) : \begin{cases} x_1'(t) &= -3x_1(t) + 8x_2(t) \\ x_2'(t) &= -2x_1(t) + 5x_2(t) \end{cases},$$

c'est à dire qu'on souhaite trouver tous les couples de fonctions (x_1, x_2) dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient ce système pour tout réel t .

Pour un tel couple de fonctions, on pose pour tout réel t , $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ et $X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix}$.

1. Montrer que le système (S) équivaut à l'égalité matricielle $X'(t) = AX(t)$ où A est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à déterminer.
2. (a) Montrer qu'il existe un seul réel λ tel que la matrice $A - \lambda I_2$ ne soit pas inversible.
(b) Pour le réel λ trouvé dans la question précédente, déterminer toutes les matrices $U \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telles que $AU = \lambda U$.

Dans toute la suite, on considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et la matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Vérifier que la matrice P est inversible et expliciter P^{-1} .
4. Montrer que $P^{-1}AP = T$.
Soit (x_1, x_2) un couple de solutions de (S) .
On pose pour tout réel t , $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = P^{-1}X(t)$ et $Y'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix}$.
5. (a) Vérifier que pour tout réel t , $Y'(t) = P^{-1}X'(t)$ et montrer que le système (S) équivaut à l'égalité matricielle $Y'(t) = TY(t)$.
(b) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y_2'(t) = y_2(t)$ puis expliciter $y_2(t)$ pour tout réel t en fonction d'une constante μ .
(c) Montrer que pour tout réel t , $y_1'(t) - y_1(t) = -2y_2(t)$. Résoudre cette équation différentielle pour expliciter $y_1(t)$ pour tout réel t .
(d) Montrer qu'il existe deux constantes $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ telles que pour tout réel t ,

$$\begin{cases} x_1(t) &= (2\lambda + \mu)e^t - 4\mu te^t \\ x_2(t) &= \lambda e^t - 2\mu te^t \end{cases}.$$

Donner l'unique couple de solutions (x_1, x_2) vérifiant $x_1(0) = 1$ et $x_2(0) = 1$.

Problème 1 : Une suite récurrente linéaire d'ordre 3

Dans tout le problème, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Partie I : Calcul des puissances d'une matrice

Le but de cette partie est d'exprimer A^n pour tout entier naturel n .

1. Déterminer tous les réels λ tels qu'il existe une matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant $AX = \lambda X$.
2. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:
(a) $AX = X$.
(b) $AX = -X$.
(c) $AX = 2X$.
3. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.
(a) Montrer que la matrice P est inversible et déterminer P^{-1} .
(b) Calculer $P^{-1}AP$. On appelle D la matrice diagonale obtenue.
(c) Calculer D^n pour tout entier naturel n .
(d) Montrer que pour tout entier naturel n , $P^{-1}A^nP = D^n$.
(e) En déduire la valeur de A^n pour tout entier naturel n .

Partie II : Etude de la suite

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant $u_0 = -6, u_1 = u_2 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n.$$

1. Compléter la fonction **Python** suivante qui prend en argument un entier naturel **n** et renvoie la valeur de u_n .

```
def masuite(n):  
    U=[-6,0,0]  
    for ...:  
        U.append(...)  
    return ...
```

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}, X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$.
4. Donner l'expression de u_n pour tout entier naturel n .
5. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Problème 2 : Des suites et des logarithmes

Partie I : La série harmonique

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right).$$

La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ s'appelle la série harmonique.

1. Montrer que pour tout $t > -1, \ln(1+t) \leq t$.
2. En faisant apparaître une somme télescopique, calculer T_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = +\infty$.
3. En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
4. Ecrire une fonction **Python** **seuil(A)** qui prend en entrée un réel A et qui renvoie la valeur du premier entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $S_n > A$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n = S_n - \ln(n)$.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \ln \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)$. En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq \frac{1}{n}$.
7. Justifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

On note $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. Ce réel, dont une valeur approchée est 0,577, est connu sous le nom de **constante d'Euler-Mascheroni**.

8. En déduire que $S_n \sim \ln(n)$.

Partie II : Une approximation de $\ln(2)$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A_{2n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \quad \text{et} \quad S_{2n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}.$$

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_{2n} = S_{2n} - S_n$.
3. Montrer que la suite $(A_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\ln(2)$.
4. Montrer que les suites $(A_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(A_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. En déduire que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.
5. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_{2n} \leq \ln(2) \leq A_{2n+1}$.
6. En déduire que pour tout $n \geq 1$, $|A_n - \ln(2)| \leq \frac{1}{n+1}$.
7. Ecrire une fonction `approx(epsilon)` prenant en argument un réel `epsilon` strictement positif et qui renvoie une valeur de A_n tel que A_n soit une approximation de $\ln(2)$ à `epsilon` près.