

Etude d'une marche aléatoire

On considère trois points distincts du plan nommés A , B et C . Nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points.

A l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve sur le point A . Ensuite, le mouvement du pion respecte les deux règles suivantes :

- le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n + 1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n , plus précisément il ne dépend pas des positions occupées aux étapes précédentes ;
- pour passer de l'étape n à l'étape $n + 1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'événement « le pion se trouve en A à l'étape n », B_n l'événement « le pion se trouve en B à l'étape n » et C_n l'événement « le pion se trouve en C à l'étape n ».

On note également :

$$\forall n \in \mathbb{N}, p_n = \mathbb{P}(A_n), \quad q_n = \mathbb{P}(B_n), \quad r_n = \mathbb{P}(C_n) \quad \text{et} \quad V_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix},$$

et on considère la matrice $M = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Partie I : Calcul des puissances d'une matrice

1. Déterminer les deux réels λ pour lesquels il existe une matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant $MX = \lambda X$.
2. Trouver toutes les matrices colonnes $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telles que :
 - (a) $MX = X$;
 - (b) $MX = \frac{1}{4}X$.

Posons $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} .
4. Calculer $P^{-1}MP$. On note D la matrice diagonale obtenue.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M^n = \frac{1}{3 \times 4^n} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix}.$$

Partie II : Calcul des probabilités

1. Calculer les nombres p_0, q_0, r_0, p_1, q_1 et r_1 .
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la relation $V_{n+1} = MV_n$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = M^n V_0$, puis une expression de p_n, q_n et r_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Déterminer les limites respectives des suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Interpréter le résultat.

Partie III : Nombre moyen de passages en A

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n le nombre moyen de passages du pion en A entre l'étape 1 et l'étape n et on définit pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ les variables aléatoires :

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{si } A_k \text{ est réalisé,} \\ 0 & \text{si } \overline{A_k} \text{ est réalisé.} \end{cases}$$

1. Interpréter la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_n$ et le nombre $\mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_n)$.
2. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire une expression de a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis un équivalent de a_n quand n tend vers $+\infty$.

Corrigé

Partie I : Calcul des puissances d'une matrice

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que l'équation $MX = \lambda X$ admette une solution non nulle. Cette équation équivaut à $(M - \lambda I_3)X = 0$. Or, pour tout réel λ , cette équation admet la solution nulle et celle-ci est unique si et seulement si $M - \lambda I_3$ est inversible.

On cherche donc à déterminer les réels λ pour lesquels $M - \lambda I_3$ n'est pas inversible, c'est à dire les réels λ pour lesquels $\text{rg}(M - \lambda I_3) < 3$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Echelonnons la matrice $M - \lambda I_3$. On a

$$\begin{aligned} M - \lambda I_3 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2-4\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-4\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-4\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2-4\lambda \\ 1 & 2-4\lambda & 1 \\ 2-4\lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + (4\lambda-2)L_1} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2-4\lambda \\ 1 & 2-4\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -16\lambda^2 + 20\lambda - 4 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2-4\lambda \\ 0 & 1-4\lambda & 4\lambda-1 \\ 0 & 4\lambda-1 & -16\lambda^2 + 20\lambda - 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2-4\lambda \\ 0 & 1-4\lambda & 4\lambda-1 \\ 0 & 0 & -16\lambda^2 + 20\lambda - 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Observons que $-16\lambda^2 + 20\lambda - 4 = -4(4\lambda^2 - 5\lambda + 1) = -4(\lambda - 1)(4\lambda - 1)$ donc les racines de ce trinôme du second degré sont 1 et $\frac{1}{4}$.

- Si $\lambda = \frac{1}{4}$, on obtient $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\text{rg}(M - \frac{1}{4}I_3) = 1 < 3$.
- Si $\lambda = 1$, on obtient $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\text{rg}(M - I_3) = 2 < 3$.
- Si $\lambda \notin \{\frac{1}{4}, 1\}$, on a $1 - 4\lambda \neq 0$ et $-16\lambda^2 + 20\lambda - 4 \neq 0$, donc $\text{rg}(M - \lambda I_3) = 3$.

Les deux réels cherchés sont donc $\frac{1}{4}$ et 1.

2. (a) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On a

$$\begin{aligned} MX = X &\Leftrightarrow 4M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 4x \\ x + 2y + z = 4y \\ x + y + 2z = 4z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \\ &\xrightarrow[L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1]{L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1} \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases} \end{aligned}$$

donc l'ensemble des solutions de $MX = X$ est $\left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}. \right\}$

(b) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On a

$$\begin{aligned} MX = \frac{1}{4}X &\Leftrightarrow 4M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = x \\ x + 2y + z = y \\ x + y + 2z = z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x + y + z = 0 \\ &\Leftrightarrow z = -x - y. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x - y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ainsi, l'ensemble des solutions de } MX = \frac{1}{4}X \text{ est } \left\{ X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, (x, y) \in \mathbb{R}^2. \right\}$$

3. Posons $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculons P^{-1} par la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) &\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2]{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) &\xrightarrow[L_2 \leftarrow -3L_2 + L_3]{L_1 \leftarrow 3L_1 + L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) &\xrightarrow[L_3 \leftarrow -\frac{1}{3}L_3]{L_1 \leftarrow -\frac{1}{3}L_1, L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2} \\ &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array} \right) \end{aligned}$$

On obtient $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

4. On a

$$\begin{aligned} P^{-1}MP &= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}} = D. \end{aligned}$$

5. On a $P^{-1}MP = D$ donc $M = PDP^{-1}$. Par une récurrence immédiate, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix} = \frac{1}{4^n} \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Ainsi, pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned} M^n &= \frac{1}{3 \times 4^n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3 \times 4^n} \begin{pmatrix} 4^n & 1 & 0 \\ 4^n & 0 & 1 \\ 4^n & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\frac{1}{3 \times 4^n} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix}}. \end{aligned}$$

Partie II : Calcul des probabilités

1. D'après l'énoncé, on a $p_0 = 1$, $q_0 = r_0 = 0$, $p_1 = \frac{1}{2}$ et $q_1 = r_1 = \frac{1}{4}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales dans le système complet d'événements (A_n, B_n, C_n) , on a

$$\begin{cases} \mathbb{P}(A_{n+1}) &= \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1})\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1})\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1})\mathbb{P}(C_n) \\ \mathbb{P}(B_{n+1}) &= \mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1})\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1})\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1})\mathbb{P}(C_n) \\ \mathbb{P}(C_{n+1}) &= \mathbb{P}_{A_n}(C_{n+1})\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(C_{n+1})\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1})\mathbb{P}(C_n) \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} p_{n+1} &= \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{4}r_n \\ q_{n+1} &= \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{4}r_n \\ r_{n+1} &= \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{2}r_n \end{cases}$$

ce qui s'écrit matriciellement

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$$

ou encore

$$\boxed{V_{n+1} = MV_n.}$$

3. On en déduit par une récurrence immédiate que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, V_n = M^n V_0.}$
Ainsi, on a pour tout entier naturel n ,

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3 \times 4^n} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$$

avec $p_0 = 1$ et $q_0 = r_0 = 0$.

Ainsi, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{p_n = \frac{4^n + 2}{3 \times 4^n}, q_n = r_n = \frac{4^n - 1}{3 \times 4^n}.}$$

4. On a $4^n + 2 = 4^n \left(1 + \frac{2}{4^n}\right)$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2}{4^n} = 1$ donc $4^n + 2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 4^n$. On montre de même que $4^n - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 4^n$.

Ainsi, quand n tend vers $+\infty$, on a $p_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4^n}{3 \times 4^n} = \frac{1}{3}$, $r_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4^n}{3 \times 4^n} = \frac{1}{3}$ et $q_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4^n}{3 \times 4^n} = \frac{1}{3}$.

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \frac{1}{3}.$$

Ceci signifie qu'après un très grand nombre d'étapes, le pion a autant de chances d'être en A , en B ou en C .

Partie III : Nombre moyen de passages en A

- La variable aléatoire $X_1 + \dots + X_n$ compte le nombre de passages en A lors des n premières étapes et le nombre $\mathbb{E}(X_1 + \dots + X_n)$ est le nombre moyen de passages en A lors des n premières étapes, c'est à dire est égal à a_n .
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{P}(A_n) = p_n = \frac{4^n + 2}{3 \times 4^n}.$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $a_n = \mathbb{E}(X_1 + \dots + X_n)$. Par linéarité de l'espérance, on obtient

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{4^k + 2}{3 \times 4^k} \\ &= \frac{n}{3} + \frac{2}{3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{4^k} \\ &= \frac{n}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{n}{3} + \frac{2}{9} \left(1 - \frac{1}{4^n}\right). \end{aligned}$$

On a $a_n = \frac{n}{3} \left(1 + \frac{2}{3n} \left(1 - \frac{1}{4^n}\right)\right)$.

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2}{3n} \left(1 - \frac{1}{4^n}\right) = 1$ donc $a_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{3}$.