

15

Limites, continuité des fonctions réelles

Dans tout le chapitre, I désignera un intervalle réel.

Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, si $I = [a, b[$ ou $]a, b[$ ou $[a, b]$ ou $]a, b]$, alors $\bar{I} = [a, b]$.

Pour $a \in \mathbb{R}$, si $I = [a, +\infty[$ ou $]a, +\infty[$, alors $x \in \bar{I}$ signifiera $x \in I$ ou $x = +\infty$.

De même, pour $a \in \mathbb{R}$, si $I =]-\infty, a]$ ou $] -\infty, a[$, alors $x \in \bar{I}$ signifiera $x \in I$ ou $x = -\infty$.

15.1 Limites

15.1.1 Limite d'une fonction en un point

Définition 1: Limite d'une fonction en un point

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, où I est un intervalle borné de \mathbb{R} . Soit $a \in \bar{I}$.

1. Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que la fonction f tend vers l au point a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \cap [a - \alpha, a + \alpha], |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

Le réel l est appelé la limite de la fonction f au point a .

On note alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$.

Dans le cas où $l = 0$, deux cas particuliers sont importants :

- (a) On dit que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0^+$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \cap [a - \alpha, a + \alpha], 0 < f(x) \leq \varepsilon.$$

- (b) On dit que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0^-$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \cap [a - \alpha, a + \alpha], -\varepsilon \leq f(x) < 0.$$

2. On dit que la fonction f tend vers $+\infty$ au point a si

$$\forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \cap [a - \alpha, a + \alpha], f(x) \geq A.$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$.

3. On dit que la fonction f tend vers $-\infty$ au point a si

$$\forall A < 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \cap [a - \alpha, a + \alpha], f(x) \leq A.$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty$.

Remarque 1. • En particulier, une fonction qui tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ en un point a n'est pas bornée.

- Par définition, si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \cap [a - \alpha, a + \alpha], f(x) \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon].$$

- Pour montrer la convergence d'une fonction vers sa limite l en un point a , il suffit de prouver que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap [a - \alpha, a + \alpha]$, $|f(x) - l| \leq r\varepsilon$ où r est un réel strictement positif qui ne dépend pas de ε . En effet, si ε parcourt \mathbb{R}_+^* , $r\varepsilon$ fait de même.

- Par définition, on a l'équivalence

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} |f(x) - l| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) - l = 0.$$

- Si f est définie au point a et si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \in \mathbb{R}$, alors nécessairement $f(a) = l$.

En effet, par définition de la limite, on a $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \cap [a - \alpha, a + \alpha], |f(x) - l| \leq \varepsilon$.

Or, pour tout $\alpha > 0, a \in [a - \alpha, a + \alpha]$, donc $\forall \varepsilon > 0, |f(a) - l| \leq \varepsilon$, ce qui implique que $f(a) - l = 0$, i.e. $f(a) = l$.

Exemple 1. • Soit $f : x \rightarrow x + 2$ définie sur \mathbb{R} . On a $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$.

En effet, soit $\varepsilon > 0$. On pose $\alpha = \varepsilon > 0$.

Alors, pour tout $x \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$, on a $x + 2 \in [3 - \varepsilon, 3 + \varepsilon]$.

• Soit $f : \begin{cases}]0, 1] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$.

Alors $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0^+$.

En effet, soit $\varepsilon > 0$. Posons $\alpha = \varepsilon^2 > 0$.

Par stricte croissance de la fonction racine carrée sur \mathbb{R}_+ , on a

$$\forall x \in]0, 1] \cap [0 - \varepsilon^2, 0 + \varepsilon^2] =]0, \min(\varepsilon^2, 1)], 0 < \sqrt{x} \leq \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon.$$

• Soit $f : \begin{cases}]0, 1] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{1}{x} \end{cases}$.

Alors $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

En effet, soit $A > 0$. Posons $\alpha = \frac{1}{A} > 0$.

Par stricte décroissance de la fonction inverse sur \mathbb{R}_+^* , on a

$$\forall x \in]0, 1] \cap \left[0 - \frac{1}{A}, 0 + \frac{1}{A}\right] = \left]0, \min\left(\frac{1}{A}, 1\right)\right], \frac{1}{x} \geq A.$$

Proposition 1: Unicité de la limite en un point

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, où I est un intervalle borné. Soit $a \in \bar{I}$.

La limite de f au point a , si elle existe, est unique.

Démonstration. Supposons qu'il existe deux réels $(l, l') \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l'$.

Supposons par l'absurde que $l \neq l'$. Soit $\varepsilon = \frac{|l - l'|}{3} > 0$.

Par définition, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap [a - \alpha, a + \alpha]$, $|f(x) - l| \leq \varepsilon$.

De même, il existe $\alpha' > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap [a - \alpha', a + \alpha']$, $|f(x) - l'| \leq \varepsilon$.

Soit $\alpha'' = \min(\alpha, \alpha')$.

Puisque $[a - \alpha'', a + \alpha''] \subset [a - \alpha, a + \alpha]$ et $[a - \alpha'', a + \alpha''] \subset [a - \alpha', a + \alpha']$, on a d'après l'inégalité triangulaire, pour tout $x \in [a - \alpha'', a + \alpha'']$,

$$|l - l'| = |l - f(x) + f(x) - l'| \leq |l - f(x)| + |f(x) - l'| \leq 2\varepsilon$$

d'où $|l - l'| \leq \frac{2|l - l'|}{3}$, i.e. $\frac{|l - l'|}{3} \leq 0$, ce qui est absurde car $|l - l'| > 0$.

On a donc nécessairement $l = l'$. ■

Remarque 2. Il est clair qu'on ne peut avoir simultanément $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

De même, on ne peut pas avoir une limite finie et une limite infinie au même point.

Définition 2: Limite à droite

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, où I est un intervalle borné. Soit $a \in \bar{I}$. On suppose qu'il existe $h > 0$ tel que $]a, a + h[\subset I$.

1. Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que la fonction f tend vers l à droite de a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \cap]a, a + \alpha[, |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} l$.

2. On dit que la fonction f tend vers $+\infty$ à droite de a si

$$\forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \cap]a, a + \alpha[, f(x) \geq A.$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} +\infty$.

3. On dit que la fonction f tend vers $-\infty$ à droite de a si

$$\forall A < 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \cap]a, a + \alpha[, f(x) \leq A.$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} -\infty$.

Remarque 3. • On note comme précédemment $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0^+$ ou 0^- le cas échéant.

• La fonction f tend vers l à droite de a (resp. $\pm\infty$) si et seulement si la restriction de f à $I \cap]a, +\infty[$ tend vers l en a (resp. $\pm\infty$).

• Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ (resp. $\pm\infty$), alors $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$ (resp. $\pm\infty$).

• Cette fois, même si f est définie au point a , on peut avoir $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq f(a)$.

Exemple 2. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 0$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

On a alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ car $\forall \alpha > 0, \forall x \in]0, \alpha[, f(x) = 0$.

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \neq 1 = f(0)$.

Définition 3: Limite à gauche

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, où I est un intervalle borné. Soit $a \in \bar{I}$. On suppose qu'il existe $h > 0$ tel que $[a - h, a[\subset I$.

1. Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que la fonction f tend vers l à gauche de a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \cap [a - \alpha, a[, |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^-} l$.

2. On dit que la fonction f tend vers $+\infty$ à gauche de a si

$$\forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \cap [a - \alpha, a[, f(x) \geq A.$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^-} +\infty$.

3. On dit que la fonction f tend vers $-\infty$ à gauche de a si

$$\forall A < 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \cap [a - \alpha, a[, f(x) \leq A.$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^-} -\infty$.

Remarque 4. • On note comme précédemment $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 0^+$ ou 0^- le cas échéant.

• La fonction f tend vers l à gauche de a (resp. $\pm\infty$) si et seulement si la restriction de f à $I \cap]-\infty, a[$ tend vers l en a (resp. $\pm\infty$).

• Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ (resp. $\pm\infty$), alors $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$ (resp. $\pm\infty$).

• Cette fois, même si f est définie au point a , on peut avoir $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq f(a)$.

• On peut avoir $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$. Dans ce cas, la fonction f n'admet pas de limite en a .

Exemple 3. • On a vu dans le chapitre « Nombres réels » que pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\lim_{x \rightarrow n^-} \lfloor x \rfloor = n - 1 \neq n = \lim_{x \rightarrow n^+} \lfloor x \rfloor.$$

Ainsi, on a $\lim_{x \rightarrow n^-} \lfloor x \rfloor \neq \lfloor n \rfloor$. La fonction partie entière n'admet donc pas de limite en les entiers relatifs, seulement une limite à gauche et une limite à droite.

• On a vu dans le chapitre « Fonctions réelles usuelles » que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Remarque 5. • On peut avoir $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ sans que f n'admette de limite en a .

En effet, reprenons l'exemple de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 0$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \neq 1 = f(0)$.

Or, si f admettait une limite en 0, on aurait nécessairement $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$, ce qui impliquerait que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$.

Ainsi, f est définie en 0, admet une limite à gauche et à droite de 0, ces limites sont égales, mais la fonction f n'admet pas de limite en 0.

• En revanche, si on a $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$, alors la fonction f admet une limite en a et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

15.1.2 Limite d'une fonction en $\pm\infty$ **Définition 4: Limite d'une fonction en $+\infty$**

Soit $a \in \mathbb{R}$, soit $f : I = [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

1. Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que la fonction f tend vers l en $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in I \cap [A, +\infty[, |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

Le réel l est appelé la limite de la fonction f en $+\infty$.

On note alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l$.

Dans le cas où $l = 0$, deux cas particuliers sont importants :

- (a) On dit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in I \cap [A, +\infty[, 0 < f(x) \leq \varepsilon.$$

- (b) On dit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^-$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in I \cap [A, +\infty[, -\varepsilon \leq f(x) < 0.$$

2. On dit que la fonction f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ si

$$\forall M > 0, \exists A > 0, \forall x \in I \cap [A, +\infty[, f(x) \geq M.$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

3. On dit que la fonction f tend vers $-\infty$ en $+\infty$ si

$$\forall M < 0, \exists A > 0, \forall x \in I \cap [A, +\infty[, f(x) \leq M.$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$.

Remarque 6. 1. En particulier, une fonction qui tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ en $+\infty$ n'est pas bornée.

2. Par définition, si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in I \cap [A, +\infty[, l - \varepsilon \leq f(x) \leq l + \varepsilon.$$

Exemple 4. • On a vu dans le chapitre « Fonctions réelles usuelles » que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

- On a vu dans le chapitre « Fonctions réelles usuelles » que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$.

En effet, soit $\varepsilon > 0$. Soit $A = \frac{1}{\varepsilon} > 0$.

Alors pour tout $x \geq A > 0$, on a $0 < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{A} = \varepsilon$.

Proposition 2: Unicité de la limite en $+\infty$

Soit $a \in \mathbb{R}$, soit $f : I = [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

La limite de f en $+\infty$, si elle existe, est unique.

Démonstration. Supposons qu'il existe deux réels $(l, l') \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l'$.

Supposons par l'absurde que $l \neq l'$. Soit $\varepsilon = \frac{|l - l'|}{3} > 0$.

Par définition, il existe $A > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap [A, +\infty[$, $|f(x) - l| \leq \varepsilon$.

De même, il existe $A' > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap [A', +\infty[$, $|f(x) - l'| \leq \varepsilon$.

Soit $A'' = \max(A, A')$.

Puisque $[A'', +\infty[\subset [A, +\infty[$ et $[A'', +\infty[\subset [A', +\infty[$, on a d'après l'inégalité triangulaire, pour tout $x \in [A'', +\infty[$,

$$|l - l'| = |l - f(x) + f(x) - l'| \leq |l - f(x)| + |f(x) - l'| \leq 2\varepsilon$$

d'où $|l - l'| \leq \frac{2|l - l'|}{3}$, i.e. $\frac{|l - l'|}{3} \leq 0$, ce qui est absurde car $|l - l'| > 0$.

On a donc nécessairement $l = l'$. ■

Remarque 7. Il est clair qu'on ne peut avoir simultanément $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

De même, on ne peut pas avoir une limite finie et une limite infinie en $+\infty$.

Définition 5: Limite d'une fonction en $-\infty$

Soit $a \in \mathbb{R}$, soit $f : I \rightarrow]-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que la fonction f tend vers l en $-\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A < 0, \forall x \in I \cap]-\infty, A], |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

Le réel l est appelé la limite de la fonction f en $-\infty$.

On note alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} l$.

Dans le cas où $l = 0$, deux cas particuliers sont importants :

- (a) On dit que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^+$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A < 0, \forall x \in I \cap]-\infty, A], 0 < f(x) \leq \varepsilon.$$

- (b) On dit que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^-$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A < 0, \forall x \in I \cap]-\infty, A], -\varepsilon \leq f(x) < 0.$$

2. On dit que la fonction f tend vers $+\infty$ en $-\infty$ si

$$\forall M > 0, \exists A < 0, \forall x \in I \cap]-\infty, A], f(x) \geq M.$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$.

3. On dit que la fonction f tend vers $-\infty$ en $-\infty$ si

$$\forall M < 0, \exists A < 0, \forall x \in I \cap]-\infty, A], f(x) \leq M.$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$.

Remarque 8. 1. En particulier, une fonction qui tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ en $-\infty$ n'est pas bornée.

2. Par définition, si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A < 0, \forall x \in I \cap]-\infty, A], l - \varepsilon \leq f(x) \leq l + \varepsilon.$$

Exemple 5. • On a vu dans le chapitre « Fonctions réelles usuelles » que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$.

• On a vu dans le chapitre « Fonctions réelles usuelles » que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$.

En effet, soit $\varepsilon > 0$. Soit $A = -\frac{1}{\varepsilon} > 0$.

Alors pour tout $x \leq A < 0$, on a $0 > \frac{1}{x} \geq \frac{1}{A} = -\varepsilon$.

Proposition 3: Unicité de la limite en $-\infty$

Soit $a \in \mathbb{R}$, soit $f : I =]-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$.

La limite de f en $-\infty$, si elle existe, est unique.

Démonstration. Supposons qu'il existe deux réels $(l, l') \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l'$.

Supposons par l'absurde que $l \neq l'$. Soit $\varepsilon = \frac{|l - l'|}{3} > 0$.

Par définition, il existe $A < 0$ tel que pour tout $x \in I \cap]-\infty, A]$, $|f(x) - l| \leq \varepsilon$.

De même, il existe $A' < 0$ tel que pour tout $x \in I \cap]-\infty, A']$, $|f(x) - l'| \leq \varepsilon$.

Soit $A'' = \min(A, A')$.

Puisque $] -\infty, A''[\subset] -\infty, A]$ et $] -\infty, A''[\subset] -\infty, A']$, on a d'après l'inégalité triangulaire, pour tout $x \in] -\infty, A''[$,

$$|l - l'| = |l - f(x) + f(x) - l'| \leq |l - f(x)| + |f(x) - l'| \leq 2\varepsilon$$

d'où $|l - l'| \leq \frac{2|l - l'|}{3}$, i.e. $\frac{|l - l'|}{3} \leq 0$, ce qui est absurde car $|l - l'| > 0$.

On a donc nécessairement $l = l'$. ■

Remarque 9. Il est clair qu'on ne peut avoir simultanément $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

De même, on ne peut pas avoir une limite finie et une limite infinie en $-\infty$.

Définition 6: Asymptote oblique

Soit $A \in \mathbb{R}$, soit $f : I = [A, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq 0$.

On dit que la courbe représentative de la fonction f admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ en $+\infty$ si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (ax + b) = 0.$$

Remarque 10. On a bien sûr une définition analogue pour une asymptote oblique en $-\infty$.

Exemple 6. Soit $f : \begin{cases}]1, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^2 + 1}{x - 1} \end{cases}$. Montrons que la courbe représentative de la

fonction f admet en $+\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = x + 1$. En effet, pour tout $x > 1$, on a

$$f(x) - (x + 1) = \frac{x^2 + 1}{x - 1} - (x + 1) = \frac{x^2 + 1 - (x + 1)(x - 1)}{x - 1} = \frac{x^2 + 1 - (x^2 - 1)}{x - 1} = \frac{2}{x - 1}.$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x - 1} = 0^+$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x + 1) = 0^+$, ce qui prouve que la courbe représentative de la fonction f admet une asymptote oblique d'équation $y = x + 1$ en $+\infty$ et est située au-dessus de cette asymptote.

15.1.3 Caractérisation séquentielle de la limite

Le théorème suivant énonce le lien entre les limites de fonctions et les limites de suites.

Théorème 1: Caractérisation séquentielle de la limite

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in \bar{I}$. Soit $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$;
2. Pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = l$.

Démonstration. Nous allons démontrer le théorème dans le cas où $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$. Les autres cas ($a = \pm\infty$ et $l \in \mathbb{R}$ ou $l = \pm\infty$) se traitent de façon analogue, en revenant aux définitions.

- Montrons que 1) \Rightarrow 2).

Supposons que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap [a - \alpha, a + \alpha]$, $|f(x) - l| \leq \varepsilon$.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle à valeurs dans I telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$.

Par définition, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - a| \leq \alpha$, ce qui implique que pour tout $n \geq n_0$, $|f(u_n) - l| \leq \varepsilon$.

Par définition, ceci signifie que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = l$.

- Montrons que 2) \Rightarrow 1).

On suppose que pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = l$.

Montrons que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$. Pour cela, supposons par l'absurde que ce ne soit pas le cas. En niant la définition, on a

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists x \in I \cap [a - \alpha, a + \alpha], |f(x) - l| > \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$ qui satisfasse la définition ci-dessus.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puisque $\alpha = \frac{1}{n} > 0$, il existe $u_n \in I \cap [a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}]$ tel que $|f(u_n) - l| > \varepsilon$.

On a donc construit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ à valeurs dans I telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n - a| \leq \frac{1}{n}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|f(u_n) - l| > \varepsilon$ donc la suite $((f(u_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers l , ce qui contredit notre hypothèse de départ.

Ainsi, il est impossible que f ne tende pas vers l en a .

On a bien montré par l'absurde que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$. ■

Exemple 7. • On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{n}\right) = -\infty$.

• Ce théorème permet de montrer que la fonction cosinus n'admet pas de limite en $+\infty$ (ni en $-\infty$). En effet, supposons par l'absurde que la fonction cosinus admette une limite finie l en $+\infty$ (la fonction cosinus étant bornée, la limite ne peut pas être infinie).

D'après la caractérisation séquentielle de la limite, pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$, la suite $(\cos(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers l .

Ainsi, puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\pi = +\infty$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(n\pi) = l$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos(n\pi) = (-1)^n$. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n = l$, ce qui est absurde car la suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas.

On aurait pu également montrer que les deux suites $(\cos(2n\pi))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\cos((2n+1)\pi))_{n \in \mathbb{N}}$ étaient convergentes de limites différentes.

On montrerait de même que la fonction sinus n'admet pas de limite en $+\infty$ et en $-\infty$.

15.1.4 Opérations sur les limites

En utilisant la caractérisation séquentielle de la limite, on montre que les limites de fonctions héritent des mêmes propriétés que les limites de suites.

Dans tous les énoncés de cette section, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Proposition 4: Opérations sur les limites

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, soit $a \in \bar{I}$. On suppose que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l'$, avec $(l, l') \in \mathbb{R}^2$.

1. Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lim_{x \rightarrow a} \lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda l + \mu l'$.
2. On a $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = ll'$.
3. On suppose que $l' \neq 0$.
 - (a) Si $a = +\infty$, on suppose qu'il existe $A > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap [A, +\infty[$, $g(x) \neq 0$.
Alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{l'}$.
 - (b) Si $a = -\infty$, on suppose qu'il existe $A < 0$ tel que pour tout $x \in I \cap]-\infty, A]$, $g(x) \neq 0$.
Alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{l'}$.
 - (c) Si $a \in \mathbb{R}$, on suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap [a - \alpha, a + \alpha]$, $g(x) \neq 0$.
Alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{l'}$.
4. On a $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |l|$.

Démonstration. Faisons une preuve pour expliquer le raisonnement, toutes les autres se font de manière analogue.

Supposons que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l'$, avec $(l, l') \in \mathbb{R}^2$.

Montrons que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = ll'$.

D'après la caractérisation séquentielle de la limite, il suffit de montrer que pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (fg)(u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n)g(u_n) = ll'$.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans I telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$. Puisque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l'$, on déduit de la caractérisation séquentielle de la limite que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = l$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(u_n) = l'$.

Par produit de limites finies de suites, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n)g(u_n) = ll'$.

Ceci montre bien que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = ll'$. ■

Remarque 11. • En particulier, si g est une fonction constante égale à c , on trouve

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + c) = l + c \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a} cf(x) = cl.$$

Proposition 5

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, soit $a \in \bar{I}$. On suppose que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim_{x \rightarrow a} \lambda f(x) = +\infty$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_-^*$, $\lim_{x \rightarrow a} \lambda f(x) = -\infty$.
2. On a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0^+$.
3. Si $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction minorée sur I , alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = +\infty$.
4. Soit $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l \in \mathbb{R}$.
 - Si $l > 0$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = +\infty$.
 - Si $l < 0$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = -\infty$.
5. Si $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$), alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)g(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$).

Exemple 8. • On a $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\tan(x)} = 0^+$.

- Puisque la fonction sinus est minorée sur \mathbb{R} et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sin(x) = +\infty$.

On a des résultats analogues si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Proposition 6

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, soit $a \in \bar{I}$. On suppose que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim_{x \rightarrow a} \lambda f(x) = -\infty$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_-^*$, $\lim_{x \rightarrow a} \lambda f(x) = +\infty$.
2. On a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0^-$.
3. Si $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction majorée sur I , alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = -\infty$.
4. Soit $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l \in \mathbb{R}$.
 - Si $l > 0$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = -\infty$.
 - Si $l < 0$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = +\infty$.
5. Si $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$), alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)g(x) = -\infty$ (resp. $+\infty$).

Exemple 9. • On a $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\tan(x)} = 0^-$.

- Puisque la fonction sinus est majorée sur \mathbb{R} et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sin(x) = -\infty$.

Proposition 7

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, soit $a \in \bar{I}$. On suppose que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

1. (a) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0^+$, alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.
- (b) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0^-$, alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.
2. Soit $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée.
Alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$.

Exemple 10. • On a $\lim_{x \rightarrow 2^+} x - 2 = 0^+$ donc $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x - 2} = +\infty$.

De même, $\lim_{x \rightarrow 2^-} x - 2 = 0^-$ donc $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x - 2} = -\infty$.

- On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Puisque la fonction cosinus est bornée sur \mathbb{R} , on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cos(x) = 0.$$

On peut résumer ces résultats dans des tableaux, analogues à ceux que nous avons vus dans le chapitre « Suites réelles ».

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, soit $a \in \bar{I}$, avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Soient l et l' deux réels.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l'$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	forme indéterminée
$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$	$-\infty$	forme indéterminée	$-\infty$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l > 0$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l < 0$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l' > 0$	ll'	0	ll'
$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$	0	0	0
$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l' < 0$	ll'	0	ll'
$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$	$+\infty$	forme indéterminée	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$	$-\infty$	forme indéterminée	$+\infty$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l' > 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$	forme indéterminée	forme indéterminée
$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l' < 0$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$	$-\infty$	$+\infty$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \neq 0$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}$
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0^+$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0^-$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0^+$
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0^-$

Remarque 12. On a les mêmes formes indéterminées que pour les suites. Les méthodes pour les lever lorsque $a = \pm\infty$ sont les mêmes.

Par exemple, pour calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 + x}{2x^2 + 1}$, on factorise le numérateur par x^3 et le dénominateur par x^2 et on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 + x}{2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 \left(3 + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(2 + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{1}{x^2}} = -\infty.$$

En revanche, si on souhaite factoriser par les termes dominants en 0, il faut factoriser par les monômes de plus petits degrés.

Par exemple,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 + x}{2x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left(3x^2 + 1\right)}{x \left(2x + 1\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 1}{2x + 1} = 1.$$

Enfin, on a un dernier résultat très important en pratique.

Proposition 8: Limite de fonctions composées

Soient I et J des intervalles réels. Soit $f : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in \bar{I}$ et $b \in \bar{J}$.

Soit $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

On suppose que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = l$.

Alors

$$\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = l.$$

Démonstration. Montrons le résultat dans le cas où a, b et l sont des réels. Les autres cas (a, b réels et l infini, a infini, b réel et l fini, a, b infinis et l réel...) se montrent de manière analogue.

Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = l$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in J \cap [b - \eta, b + \eta], |g(x) - l| \leq \varepsilon.$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in I \cap [a - \alpha, a + \alpha], |f(x) - b| \leq \eta.$$

Ainsi, pour tout $x \in I \cap [a - \alpha, a + \alpha]$, on a $f(x) \in J \cap [b - \eta, b + \eta]$ donc

$$\forall x \in I \cap [a - \alpha, a + \alpha], |g(f(x)) - l| \leq \varepsilon,$$

ce qui prouve que $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = l$. ■

Exemple 11. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ donc par composition de limites,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0.$$

15.1.5 Résultats fondamentaux sur les limites et inégalités

Proposition 9: Signe d'une fonction de limite non nulle

Soit $f : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}$, soit $a \in \bar{I}$. On suppose que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$, avec $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

1. On suppose que $l > 0$ ou $l = +\infty$.
 - (a) Si $a \in \mathbb{R}$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap [a - \alpha, a + \alpha]$, $f(x) > 0$.
 - (b) Si $a = +\infty$, il existe $A > 0$ tel que pour tout $x \geq A$, $f(x) > 0$.
 - (c) Si $a = -\infty$, il existe $A < 0$ tel que pour tout $x \leq A$, $f(x) > 0$.
2. On suppose que $l < 0$ ou $l = -\infty$.
 - (a) Si $a \in \mathbb{R}$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap [a - \alpha, a + \alpha]$, $f(x) < 0$.
 - (b) Si $a = +\infty$, il existe $A > 0$ tel que pour tout $x \geq A$, $f(x) < 0$.
 - (c) Si $a = -\infty$, il existe $A < 0$ tel que pour tout $x \leq A$, $f(x) < 0$.

Démonstration.

1. On suppose que $l > 0$. (La preuve dans le cas où $l = +\infty$ est immédiate.)
 - (a) On suppose que $a \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon = \frac{l}{2} > 0$. Par définition, puisque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap [a - \alpha, a + \alpha]$, $|f(x) - l| \leq \varepsilon = \frac{l}{2}$.
Autrement dit, pour tout $x \in I \cap [a - \alpha, a + \alpha]$, $l - \frac{l}{2} \leq f(x) \leq l + \frac{l}{2}$, donc $f(x) \geq \frac{l}{2} > 0$.
 - (b) On suppose que $a = +\infty$. Soit $\varepsilon = \frac{l}{2} > 0$. Par définition, puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$, il existe $A > 0$ tel que pour tout $x \geq A$, $|f(x) - l| \leq \varepsilon = \frac{l}{2}$.
Autrement dit, pour tout $x \geq A$, $l - \frac{l}{2} \leq f(x) \leq l + \frac{l}{2}$, donc $f(x) \geq \frac{l}{2} > 0$.
La preuve dans le cas où $a = -\infty$ est analogue.
2. Les preuves dans les cas où $l < 0$ ou $l = -\infty$ sont analogues. ■

Corollaire 1: Passage à la limite dans une inégalité

Soit $f : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}$, soit $a \in \bar{I}$. On suppose que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \in \mathbb{R}$.

1. Supposons qu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $f(x) \geq m$ (ou $f(x) > m$).
Alors $l \geq m$.
2. Supposons qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $f(x) \leq M$ (ou $f(x) < M$).
Alors $l \leq M$.

Démonstration.

1. Supposons que pour tout $x \in I$, $f(x) \geq m$ (ou $f(x) > m$). Par hypothèse, pour tout $x \in I$, on a $f(x) - m \geq 0$. On a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - m = l - m$.
Si on avait $l - m < 0$, alors d'après la proposition précédente, il existerait un élément $x \in I$ pour lequel $f(x) - m < 0$, ce qui est absurde.
Donc $l - m \geq 0$, i.e. $l \geq m$.
2. Il suffit d'appliquer la preuve du premier alinéa à $-f$ qui est minorée sur I par $-M$. ■

Remarque 13. Comme pour les suites, après passage à la limite, une inégalité stricte devient une inégalité large.

En effet, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ mais $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \geq 0$.

On a les mêmes théorèmes de comparaison que pour les suites. Nous ne les démontrerons pas puisque les preuves sont analogues à celles faites dans le chapitre « Suites réelles » (ou découlent de la caractérisation séquentielle de la limite).

Théorème 2: Théorèmes de comparaison

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in \bar{I}$.

On suppose que pour tout $x \in I$, $f(x) \leq g(x)$.

1. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$.
2. Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.
3. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l' \in \mathbb{R}$, alors $l \leq l'$.

Exemple 12. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $[x] \leq x$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} [x] = -\infty$.

Théorème 3: Théorème des gendarmes

Soient $f, g, h : I \rightarrow \mathbb{R}$ trois fonctions telles que pour tout $x \in I$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

Soit $a \in \bar{I}$.

On suppose qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$.

Alors la fonction g admet une limite finie en a et

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l.$$

Exemple 13. Pour tout $x > 0$, on a $\frac{1}{x} - 1 < \left| \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{x}$, donc en multipliant par x , on a pour tout $x > 0$,

$$1 - x < x \left| \frac{1}{x} \right| \leq 1.$$

Or, $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - x = 1$. D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \left| \frac{1}{x} \right| = 1$.

15.1.6 Théorème de la limite monotone

Théorème 4: Théorème de la limite monotone, version croissante

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante, avec a et b éventuellement infinis.

1. Si f est majorée sur $]a, b[$, alors $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \sup_{x \in]a, b[} f(x)$.
2. Si f n'est pas majorée sur $]a, b[$, alors $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = +\infty$.
3. Si f est minorée sur $]a, b[$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \inf_{x \in]a, b[} f(x)$.
4. Si f n'est pas minorée sur $]a, b[$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Démonstration. Faisons la démonstration dans le cas où a et b sont réels. Les autres cas sont analogues.

1. Supposons que f est majorée sur $]a, b[$. Alors f admet une borne supérieure sur $]a, b[$. En particulier, pour tout $x \in]a, b[$, $f(x) \leq \sup_{x \in]a, b[} f(x)$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Par définition de la borne supérieure sur $]a, b[$, il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que

$$\sup_{x \in]a, b[} f(x) - \varepsilon < f(x_0) \leq \sup_{x \in]a, b[} f(x).$$

Puisque f est croissante sur $]a, b[$, en particulier sur $[x_0, b[$, alors pour tout $x \in [x_0, b[$,

$$f(x) \geq f(x_0) > \sup_{x \in]a, b[} f(x) - \varepsilon.$$

Posons $\alpha = b - x_0 > 0$. Alors $]a, b[\cap [b - \alpha, b + \alpha] = [x_0, b[$ et

$$\forall x \in [x_0, b[, \sup_{x \in]a, b[} f(x) - \varepsilon < f(x) \leq \sup_{x \in]a, b[} f(x)$$

donc pour tout $x \in]a, b[\cap [b - \alpha, b + \alpha]$, $|f(x) - \sup_{x \in]a, b[} f(x)| \leq \varepsilon$, ce qui prouve que

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \sup_{x \in]a, b[} f(x).$$

2. Supposons que f n'est pas majorée sur $]a, b[$.

Soit $A > 0$.

Puisque f n'est pas majorée sur $]a, b[$, alors il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) \geq A$.

Puisque f est croissante sur $]a, b[$, en particulier sur $[x_0, b[$, alors

$$\forall x \in [x_0, b[, f(x) \geq f(x_0) \geq A.$$

Posons $\alpha = b - x_0 > 0$. Alors $]a, b[\cap [b - \alpha, b + \alpha] = [x_0, b[$ et $\forall x \in [x_0, b[, f(x) \geq A$ donc pour tout $x \in]a, b[\cap [b - \alpha, b + \alpha]$, $f(x) \geq A$, ce qui prouve que

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = +\infty.$$

3. Supposons que f est minorée sur $]a, b[$. Alors f admet une borne inférieure sur $]a, b[$. En particulier, pour tout $x \in]a, b[$, $f(x) \geq \inf_{x \in]a, b[} f(x)$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Par définition de la borne inférieure sur $]a, b[$, il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que

$$\inf_{x \in]a, b[} f(x) \leq f(x_0) < \inf_{x \in]a, b[} f(x) + \varepsilon.$$

Puisque f est croissante sur $]a, b[$, en particulier sur $]a, x_0]$, alors pour tout $x \in]a, x_0]$,

$$f(x) \leq f(x_0) < \inf_{x \in]a, b[} f(x) + \varepsilon.$$

Posons $\alpha = x_0 - a > 0$. Alors $]a, b[\cap [a - \alpha, a + \alpha] =]a, x_0]$ et

$$\forall x \in]a, x_0], \inf_{x \in]a, b[} f(x) \leq f(x) < \inf_{x \in]a, b[} f(x) + \varepsilon$$

donc pour tout $x \in]a, b[\cap [a - \alpha, a + \alpha]$, $|f(x) - \inf_{x \in]a, b[} f(x)| \leq \varepsilon$, ce qui prouve que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \inf_{x \in]a, b[} f(x).$$

4. Supposons que f n'est pas minorée sur $]a, b[$.

Soit $A < 0$.

Puisque f n'est pas minorée sur $]a, b[$, alors il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) \leq A$.

Puisque f est croissante sur $]a, b[$, en particulier sur $]a, x_0]$, alors

$$\forall x \in]a, x_0], f(x) \leq f(x_0) \leq A.$$

Posons $\alpha = x_0 - a > 0$. Alors $]a, b[\cap [a - \alpha, a + \alpha] =]a, x_0]$ et $\forall x \in]a, x_0], f(x) \leq A$ donc pour tout $x \in]a, b[\cap [a - \alpha, a + \alpha]$, $f(x) \leq A$, ce qui prouve que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty.$$

■

Théorème 5: Théorème de la limite monotone, version décroissante

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction décroissante, avec a et b éventuellement infinis.

1. Si f est minorée sur $]a, b[$, alors $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \inf_{x \in]a, b[} f(x)$.
2. Si f n'est pas minorée sur $]a, b[$, alors $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = -\infty$.
3. Si f est majorée sur $]a, b[$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \sup_{x \in]a, b[} f(x)$.
4. Si f n'est pas majorée sur $]a, b[$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème précédent à la fonction $-f$ qui est croissante sur $]a, b[$ et de remarquer que $-f$ est minorée si et seulement si f est majorée et $-f$ est majorée si et seulement si f est minorée. ■

Remarque 14. Dans tous les cas, on est assurés de l'existence des limites aux bornes de l'intervalle.

On peut résumer les deux versions du théorème de la limite monotone en une seule :

Théorème 6: Théorème de la limite monotone

Une fonction monotone sur un intervalle ouvert admet une limite finie ou infinie aux bornes de l'intervalle.

Exemple 14. Soit n un entier relatif. La fonction partie entière est croissante sur $]n, n + 1[$. D'autre part, elle y est bornée, donc elle admet des limites finies en n^+ et en $n + 1^-$.

15.2 Comparaison de fonctions

15.2.1 Croissances comparées

En utilisant les résultats de croissances comparées déjà démontrés dans les chapitres « Fonctions réelles usuelles » et « Suites réelles », on a le théorème suivant :

Théorème 7: Théorème de croissances comparées

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tout $\beta > 0$, on a

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty$.
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\beta}{\ln^\alpha(x)} = +\infty$.
3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\beta |\ln(x)|^\alpha = 0^+$.
4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha e^{\beta x} = 0^+$.

15.2.2 Equivalence de fonctions**Définition 7: Fonctions équivalentes**

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions qui ne s'annulent pas sur I .

Soit $a \in \bar{I}$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

On dit que f est équivalente à g au voisinage de a , et on note $f \underset{a}{\sim} g$, si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Remarque 15. Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors on a également $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$.

Exemple 15. • $x \underset{+\infty}{\sim} x + 1$.

• $x^2 + 3x - 1 \underset{0}{\sim} x^5 - 4x^2 + x - 1$.

En utilisant de nouveau la caractérisation séquentielle de la limite, on montre que l'équivalence de fonctions vérifie les mêmes propriétés que l'équivalence de suites, vues dans le chapitre « Suites réelles ».

Proposition 10

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Soient f et g des fonctions équivalentes au voisinage de a .

Soit $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$, alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$.

Remarque 16. En revanche, la réciproque est fautive.

On a $\lim_{x \rightarrow 0} x = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ mais $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0 \neq 1$ donc les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$ ne sont pas équivalentes au voisinage de 0.

Proposition 11

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, soit $a \in \bar{I}$.

Soit $l \in \mathbb{R}^*$ tel que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

Alors $f(x) \underset{a}{\sim} l$.

Exemple 16. $\cos(x) \underset{0}{\sim} 1$.

Remarque 17. En revanche, si $l = 0$ et si f n'est pas la fonction nulle, on ne peut pas écrire $f(x) \underset{a}{\sim} 0$.

Proposition 12: Propriétés de l'équivalence

Soient $f, g, h, z : I \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions ne s'annulant pas sur I . Soit $a \in \bar{I}$.

1. (Réflexivité) On a $f(x) \underset{a}{\sim} f(x)$.
2. (Symétrie) Si $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ alors $g(x) \underset{a}{\sim} f(x)$.
3. (Transitivité) Si $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{a}{\sim} h(x)$, alors $f(x) \underset{a}{\sim} h(x)$.
4. Si $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\lambda f(x) \underset{a}{\sim} \lambda g(x)$.
5. Si $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ alors $\frac{1}{f(x)} \underset{a}{\sim} \frac{1}{g(x)}$.
6. Si $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$, alors pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $f(x)^p \underset{a}{\sim} g(x)^p$.
Si de plus, les fonctions f et g sont strictement positives, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(x)^\alpha \underset{a}{\sim} g(x)^\alpha$.
7. Si $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$, alors $|f(x)| \underset{a}{\sim} |g(x)|$.
8. Si $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ et $h(x) \underset{a}{\sim} z(x)$, alors

$$f(x)h(x) \underset{a}{\sim} g(x)z(x) \quad \text{et} \quad \frac{f(x)}{h(x)} \underset{a}{\sim} \frac{g(x)}{z(x)}.$$

Proposition 13: Equivalents de référence

1. $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$;
2. $\tan(x) \underset{0}{\sim} x$;
3. $1 - \cos(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$;
4. $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$;
5. $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$;
6. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, (1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$.

Proposition 14: Composition des équivalents

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions qui ne s'annulent pas sur I .

Soit $a \in \bar{I}$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On suppose que $f \underset{a}{\sim} g$.

Soit $u : J \rightarrow I$ une fonction définie sur un intervalle J réel.

Soit $b \in \bar{J}$ tel que $\lim_{x \rightarrow b} u(x) = a$.

Alors $f \circ u(x) \underset{b}{\sim} g \circ u(x)$.

Démonstration. Ceci découle de la composition des limites. En effet, par hypothèse, on a $\lim_{x \rightarrow b} u(x) = a$ et $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, donc par composition, on trouve que

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(u(x))}{g(u(x))} = 1,$$

i.e. $f \circ u(x) \underset{b}{\sim} g \circ u(x)$. ■

Exemple 17. 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln(1 + \frac{1}{x})}$.

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ donc par composition, on trouve que $\ln(1 + \frac{1}{x}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

Par produit, on obtient que $x \ln(1 + \frac{1}{x}) \underset{+\infty}{\sim} 1$, ce qui signifie que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(1 + \frac{1}{x}) = 1$.

Finalement, par composition de limites, on trouve que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln(1 + \frac{1}{x})} = e$, d'où

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

2. De même, on a $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$ donc $\sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

Par produit, $\sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

15.3 Continuité

15.3.1 Définition et premières propriétés

Définition 8

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application. Soit $a \in I$.

- On dit que f est continue en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \cap [a - \alpha, a + \alpha], |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

- On dit que f est continue sur l'intervalle I si f est continue en tout point de I .

Remarque 18. Si f n'est pas continue en un point $a \in I$, on dit que f est discontinue en a .

Par exemple, la fonction partie entière est discontinue en tous les entiers relatifs car pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\lim_{x \rightarrow n^-} [x] \neq [n]$. En revanche, elle est continue sur tout intervalle de la forme $[n, n+1[$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

De façon informelle, on peut dire qu'une fonction est continue sur un intervalle si sa courbe représentative peut y être tracée sans lever le crayon.

Exemple 18. • La fonction exponentielle, la fonction carrée, la fonction valeur absolue, les fonctions cosinus et sinus sont continues sur \mathbb{R} .

- La fonction racine carrée est continue sur \mathbb{R}_+ .
- La fonction logarithme népérien est continue sur \mathbb{R}_+^* .
- La fonction tangente est continue sur tout intervalle de la forme $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

Définition 9: Continuité à gauche, à droite

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application. Soit $a \in I$.

- On dit que f est continue à gauche de a si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$.
- On dit que f est continue à droite de a si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.

Exemple 19. La fonction partie entière est continue à droite en tout point : en effet, elle est continue en tous les points non entiers et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\lim_{x \rightarrow n^+} [x] = n = [n]$.

Proposition 15

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, soit $a \in I$.

Alors f est continue en a si et seulement si elle y est continue à gauche et à droite.

Démonstration. Si f est continue en a , alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, donc $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.

Réciproquement, si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$ tels que

$$\forall x \in I \cap [a - \alpha_1, a], |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \forall x \in I \cap]a, a + \alpha_2], |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

Soit $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2) > 0$. Alors pour tout $x \in I \cap [a - \alpha, a + \alpha]$, $|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$, ce qui implique que f est continue en a . ■

Exemple 20. On a $\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x = 0 = |0|$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 = |0|$ donc la fonction valeur absolue est continue en 0.

Proposition 16: Opérations sur les fonctions continues

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ des applications. Soit $a \in I$. On suppose que f et g sont continues en a .

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction λf est continue en a .
2. La fonction $f + g$ est continue en a .
3. La fonction fg est continue en a .
4. S'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap [a - \alpha, a + \alpha]$, $g(x) \neq 0$, alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue en a .

Démonstration. Par hypothèse, on a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$.

1. Par multiplication par un scalaire, on a pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow a} (\lambda f)(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lambda f(x) = \lambda f(a) = (\lambda f)(a)$, ce qui implique la continuité de la fonction λf en a .
2. Par somme de limites, on a $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = f(a) + g(a) = (f + g)(a)$, ce qui implique la continuité de la fonction $f + g$ en a .
3. Par produit de limites, on a $\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times g(x) = f(a) \times g(a) = (fg)(a)$, ce qui implique la continuité de la fonction fg en a .
4. Si g ne s'annule pas dans un voisinage de a , on peut former le quotient $\frac{f}{g}$ et on a par quotient de limites, $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} = \left(\frac{f}{g}\right)(a)$, ce qui implique la continuité de la fonction $\frac{f}{g}$ en a . ■

Remarque 19. En particulier, si f et g sont continues sur I , alors λf (pour $\lambda \in \mathbb{R}$), $f + g$, fg et $\frac{f}{g}$ (dans le cas où g ne s'annule pas sur I) sont continues sur I .

Proposition 17: Composée d'applications continues

Soient I et J des intervalles réels. Soient $f : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications. Soit $a \in I$ et $b = f(a) \in J$. On suppose que f est continue en a et que g est continue en b . Alors $g \circ f$ est continue en a .

Démonstration. Par hypothèse, on a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = g(b)$.

Par composition de limites, on a $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = g(b) = g(f(a)) = g \circ f(a)$, ce qui prouve la continuité de la fonction $g \circ f$ en a . ■

Remarque 20. En particulier, si f est continue sur I et g continue sur J , alors $g \circ f$ est continue sur I .

Proposition 18: Prolongement par continuité

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application. Soit $a \in \bar{I} \setminus I$.

On suppose que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \in \mathbb{R}$.

On pose $\tilde{f} : I \cup \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \\ l & \text{si } x = a. \end{cases}$$

Alors \tilde{f} est continue en a . On dit qu'on a prolongé f par continuité en a .

Démonstration. Il s'agit de montrer que $\lim_{x \rightarrow a} \tilde{f}(x) = \tilde{f}(a)$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap [a - \alpha, a + \alpha]$, $|f(x) - l| \leq \varepsilon$.

Puisque pour tout $x \in I$, $\tilde{f}(x) = f(x)$ et puisque $\tilde{f}(a) = l$, on a donc

$$\forall x \in (I \cup \{a\}) \cap [a - \alpha, a + \alpha], |\tilde{f}(x) - l| \leq \varepsilon,$$

ce qui implique que $\lim_{x \rightarrow a} \tilde{f}(x) = l = \tilde{f}(a)$, d'où la continuité de \tilde{f} en a . ■

Remarque 21. Si f est continue sur I , alors \tilde{f} est continue sur $I \cup \{a\}$.

Exemple 21. On a déjà vu que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. On peut donc prolonger par continuité la fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ sur \mathbb{R} en posant

$$\text{sinc} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Cette fonction est appelée sinus cardinal, on la note sinc. Par construction, elle est donc continue en 0 et plus généralement sur \mathbb{R} .

La caractérisation séquentielle de la limite possède un pendant naturel :

Théorème 8: Caractérisation séquentielle de la continuité

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$.

Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est continue en a ;
2. Pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(a)$.

Démonstration. Il s'agit simplement d'appliquer la caractérisation séquentielle de la limite en utilisant le fait que f est continue en a si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. ■

Enfin le théorème suivant a déjà été utilisé dans le contexte des suites réelles.

Théorème 9

Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$. Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. On suppose que $f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle définie par $u_0 \in \mathcal{D}$ et par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite $l \in \mathcal{D}$.

Alors l est un point fixe de f , i.e.

$$l = f(l).$$

Démonstration. Il s'agit de passer à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$.

• Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$, on a de même $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l$.

• Par ailleurs, puisque $l \in \mathcal{D}$ et f est continue sur \mathcal{D} , on a $\lim_{x \rightarrow l} f(x) = f(l)$.

Ainsi, par caractérisation séquentielle de la continuité, puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \lim_{x \rightarrow l} f(x) = f(l)$.

Par unicité de la limite, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(l)$. ■

15.3.2 Théorème des valeurs intermédiaires**Théorème 10: Théorème des valeurs intermédiaires**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue.

Soient $(a, b) \in I^2$ avec $a \leq b$. Soit y compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

Démonstration. Nous allons donner une preuve par dichotomie.

Supposons $f(a) \leq f(b)$ de telle sorte que $y \in [f(a), f(b)]$.

On va construire deux suites adjacentes $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans I respectivement croissante et décroissante telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \geq 0$ et telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y \in [f(a_n), f(b_n)]$.

Construisons ces suites par récurrence forte.

Initialisation : Posons $a_0 = a$ et $b_0 = b$.

On a bien $b_0 - a_0 = b - a = \frac{b-a}{2^0}$ et $y \in [f(a_0), f(b_0)] = [f(a), f(b)]$ par hypothèse.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons construits $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$ et $b_0 \geq b_1 \geq \dots \geq b_n$ tels que pour tout $0 \leq k \leq n$, $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k} \geq 0$ et tels que pour tout $0 \leq k \leq n$, $y \in [f(a_k), f(b_k)]$.

Ainsi, $y \in [f(a_n), f(b_n)]$. Plusieurs cas se présentent.

• Si $f(\frac{a_n+b_n}{2}) \in [f(a_n), f(b_n)]$, puisque $y \in [f(a_n), f(b_n)]$ alors nécessairement $y \in [f(a_n), f(\frac{a_n+b_n}{2})]$ ou $y \in [f(\frac{a_n+b_n}{2}), f(b_n)]$.

• Si $f(\frac{a_n+b_n}{2}) \notin [f(a_n), f(b_n)]$, il y a deux sous-cas :

- soit $f(\frac{a_n+b_n}{2}) > f(b_n)$ et alors $y \in [f(a_n), f(\frac{a_n+b_n}{2})]$;

- soit $f(\frac{a_n+b_n}{2}) < f(a_n)$ et alors $y \in [f(\frac{a_n+b_n}{2}), f(b_n)]$.

Dans tous les cas, $y \in [f(a_n), f(\frac{a_n+b_n}{2})]$ ou $y \in [f(\frac{a_n+b_n}{2}), f(b_n)]$.

Dans le premier cas, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$.

On a bien $a_n \leq a_{n+1}, b_n \geq b_{n+1}, b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b - a}{2^{n+1}}$ et $y \in [f(a_{n+1}), f(b_{n+1})]$.

Dans le deuxième cas, on pose $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.

On a bien $a_n \leq a_{n+1}, b_n \geq b_{n+1}, b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b - a}{2^{n+1}}$ et $y \in [f(a_{n+1}), f(b_{n+1})]$.

On a donc bien construit par récurrence deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui vérifient les propriétés annoncées.

De plus, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n - a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b - a}{2^n} = 0$$

donc les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont bien adjacentes.

D'après le théorème des suites adjacentes, elles sont toutes les deux convergentes, de même limite $c \in [a_0, b_0] = [a, b] \subset I$.

Or, f est continue en c donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = f(c)$.

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}, f(a_n) \leq y \leq f(b_n)$, on déduit du théorème des gendarmes que $y = f(c)$.

Si on avait en fait $f(a) > f(b)$, alors $y \in [f(b), f(a)]$. En considérant $-f$ (qui est également continue sur I), puisque $-y \in [-f(a), -f(b)]$, on applique la même preuve et on trouve $c \in [a, b]$ tel que $-f(c) = -y$, i.e. $f(c) = y$. ■

Remarque 22. Le réel c n'est pas nécessairement unique. Par exemple, on a $\cos(0) = 1$ et $\cos(3\pi) = -1$. On a $0 \in [-1, 1] = [\cos(3\pi), \cos(0)]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel $c \in [0, 3\pi]$ tel que $\cos(c) = 0$. Il y en a en fait 3 qui conviennent : $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ et $\frac{5\pi}{2}$.

En revanche, si f est injective sur I , alors c est nécessairement unique.

Corollaire 2

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$ tels que $f(a) \geq 0$ et $f(b) \leq 0$ (ou $f(a) \leq 0$ et $f(b) \geq 0$).

Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires en remarquant que 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$. ■

Corollaire 3

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Démonstration. Soit I un intervalle, soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Il s'agit de montrer que $f(I)$ est un intervalle.

Pour cela, il faut montrer que pour tout $(x, z) \in f(I)^2$, pour tout $y \in [x, z]$, alors $y \in f(I)$.

Puisque $(x, z) \in f(I)^2$, il existe $(a, b) \in I^2$ tels que $x = f(a)$ et $z = f(b)$.

Ainsi, on a $f(a) \leq y \leq f(b)$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [\min(a, b), \max(a, b)]$ tel que $f(c) = y$.

Or, puisque $\min(a, b) \in I$, $\max(a, b) \in I$ et I est un intervalle, alors $[\min(a, b), \max(a, b)] \subset I$ donc $c \in I$.

Ainsi, $y = f(c) \in f(I)$, ce qui prouve que $f(I)$ est un intervalle. ■

On peut davantage préciser ce corollaire dans le théorème des bornes atteintes, qu'on admet.

Théorème 11: Théorème des bornes atteintes

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue.

Alors f est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes, i.e. il existe $(m, M) \in [a, b]^2$ tels que

$$f(m) = \min_{x \in [a, b]} f(x) \quad \text{et} \quad f(M) = \max_{x \in [a, b]} f(x).$$

Remarque 23. Dans ce cas, $f([a, b]) = [f(m), f(M)]$.

Autrement dit, l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Exemple 22. • Soit $f : x \mapsto e^x$. Alors $f([0, 1]) = [1, e]$.

• Soit $f : x \mapsto x^2$. Alors $f[-2, 1] = [1, 4]$.

• En revanche, si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue où I est un intervalle borné, mais pas fermé, il se peut que f ne soit pas bornée sur I .

Par exemple, \tan est continue sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ mais n'y est pas bornée car $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$

et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$.

Néanmoins, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $\tan(] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$ est un intervalle et on a $\tan(] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) =] -\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

15.3.3 Bijections continues

Théorème 12: Théorème de la bijection

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone.

Alors f réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$.

De plus, sa bijection réciproque $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ est continue et strictement monotone sur $f(I)$, de même monotonie que f .

Démonstration. Tout d'abord, puisque f est continue sur I , d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f(I)$ est bien un intervalle.

On a vu dans le chapitre « Vocabulaire des applications » qu'une fonction strictement monotone était injective. Ainsi, f est injective. Or, par définition, elle est surjective sur $f(I)$.

On en déduit que f est bijective de I sur $f(I)$. Notons $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ sa bijection réciproque.

• Montrons que f^{-1} a même monotonie que f . Supposons que f est strictement croissante. Montrons alors que f^{-1} est strictement croissante.

Soient $(x, y) \in f(I)^2$ avec $x < y$. Montrons que $f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$.

Si on avait $f^{-1}(x) \geq f^{-1}(y)$, par stricte croissance de f , on aurait $f(f^{-1}(x)) \geq f(f^{-1}(y))$, i.e. $x \geq y$, ce qui est absurde. On a donc nécessairement $f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$, ce qui prouve que f^{-1} est strictement croissante sur I .

On fait une preuve analogue dans le cas où f est strictement décroissante sur I .

On en déduit que f^{-1} est bien strictement monotone sur $f(I)$ de même monotonie que f .

• Il reste à montrer que f^{-1} est continue sur $f(I)$. On va le montrer dans le cas où f est strictement croissante sur I , le cas où f étant strictement décroissante se traitant de façon analogue.

Soit $y \in f(I)$. Alors il existe $x \in I$ tel que $f(x) = y$. Montrons que f^{-1} est continue en y .

- Supposons qu'il existe $r > 0$ tel que $[x - r, x + r] \subset I$.

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\delta = \min(r, \varepsilon)$. Par stricte croissance de f , on a $f(x - \delta) < f(x) < f(x + \delta)$
i.e. $f(x - \delta) < y < f(x + \delta)$.

Soit $\alpha = \min(y - f(x - \delta), f(x + \delta) - y)$.

Alors pour tout $z \in [y - \alpha, y + \alpha]$, on a $f(x - \delta) \leq z \leq f(x + \delta)$ d'où par stricte croissance de f^{-1} , $x - \delta \leq f^{-1}(z) \leq x + \delta$. Puisque $\delta \leq \varepsilon$, et en se rappelant que $x = f^{-1}(y)$, ceci implique que $f^{-1}(y) - \varepsilon \leq f^{-1}(z) \leq f^{-1}(y) + \varepsilon$.

Ainsi, pour tout $z \in [y - \alpha, y + \alpha]$, $|f^{-1}(z) - f^{-1}(y)| \leq \varepsilon$, ce qui implique la continuité de f^{-1} en y .

- Si $x = \max(I)$, alors il existe $r > 0$ tel que $[x - r, x] \subset I$.

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\delta = \min(r, \varepsilon)$. Par stricte croissance de f , on a $f(x - \delta) < f(x)$, i.e. $f(x - \delta) < y$.

Soit $\alpha = y - f(x - \delta)$. Alors pour tout $z \in [y - \alpha, y]$, on a $f(x - \delta) \leq z \leq y$ d'où par stricte croissance de f^{-1} , $x - \delta \leq f^{-1}(z) \leq x$.

Puisque $\delta \leq \varepsilon$, et en se rappelant que $x = f^{-1}(y)$, ceci implique que $f^{-1}(y) - \varepsilon \leq f^{-1}(z) \leq f^{-1}(y)$.

Ainsi, pour tout $z \in [y - \alpha, y + \alpha] \cap f(I)$, $|f^{-1}(z) - f^{-1}(y)| \leq \varepsilon$, ce qui implique la continuité de f^{-1} en y .

- Si $x = \min(I)$, alors il existe $r > 0$ tel que $[x, x + r] \subset I$.

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\delta = \min(r, \varepsilon)$. Par stricte croissance de f , on a $f(x + \delta) > f(x)$, i.e. $f(x + \delta) > y$.

Soit $\alpha = f(x + \delta) - y$. Alors pour tout $z \in [y + \alpha, \infty)$, on a $f(x + \delta) \geq z \geq y$ d'où par stricte croissance de f^{-1} , $x + \delta \geq f^{-1}(z) \geq x$.

Puisque $\delta \leq \varepsilon$, et en se rappelant que $x = f^{-1}(y)$, ceci implique que $f^{-1}(y) + \varepsilon \geq f^{-1}(z) \geq f^{-1}(y)$.

Ainsi, pour tout $z \in [y - \alpha, y + \alpha] \cap f(I)$, $|f^{-1}(z) - f^{-1}(y)| \leq \varepsilon$, ce qui implique la continuité de f^{-1} en y . ■

La fonction \tan est continue, strictement croissante sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Donc la fonction tangente est bijective de $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\tan(] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) = \mathbb{R}$. On a vu que $\tan(] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) = \mathbb{R}$ donc \tan réalise une bijection de $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur \mathbb{R} .

Définition 10: Fonction arctan

On appelle $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ la bijection réciproque de $\tan :] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$.

Proposition 19: Propriétés de arctan

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan(x)) = x$ et pour tout $x \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\arctan(\tan(x)) = x$.
2. La fonction \arctan est impaire.
3. La fonction \arctan est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} .
4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$

Démonstration.

1. Puisque \arctan est la bijection réciproque de $\tan :] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$, on a

$$\tan \circ \arctan = \text{Id}_{\mathbb{R}} \quad \text{et} \quad \arctan \circ \tan = \text{Id}_{] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[},$$

d'où le résultat attendu.

2. L'imparité de \arctan découle de l'imparité de \tan . En effet, soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\tan(-\arctan(x)) = -\tan(\arctan(x)) = -x = \tan(\arctan(-x)),$$

d'où par injectivité de \tan sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\arctan(-x) = -\arctan(x)$, ce qui prouve l'imparité de \arctan .

3. Puisque la fonction \tan est continue et strictement croissante sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, c'est une conséquence directe du théorème de la bijection.

4. Montrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$.

Soit $\varepsilon > 0$. On peut supposer $\varepsilon < \pi$, car si $\varepsilon \geq \pi$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan(x) \geq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$. Posons $A = \max(0, \tan(\frac{\pi}{2} - \varepsilon))$. Par stricte croissance de la fonction \arctan sur \mathbb{R} , on a pour tout $x \geq A$, $\arctan(A) \leq \arctan(x) < \frac{\pi}{2}$ d'où $\frac{\pi}{2} - \varepsilon \leq \arctan(x) < \frac{\pi}{2}$, ce qui implique que $|\arctan(x) - \frac{\pi}{2}| \leq \varepsilon$.

On a donc bien montré que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$.

Enfin, par imparité de \arctan ,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(-x) = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

■

Remarque 24. En particulier, on a $\arctan(0) = 0$ et $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

Le graphe de \arctan sur \mathbb{R} s'obtient à partir de celui de \tan sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$:

