Corrigé de la liste d'exercices n°14 — Variables aléatoires

Exercice 1.

1. On a $(X=Y)=\bigsqcup_{k=1}^{n}((X=k)\cap(Y=k))$ donc

$$\mathbb{P}(X=Y)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}((X=k)\cap(Y=k))=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=k)$$

par indépendance des variables alétoires X et Y.
Or, pour tout $k\in[\![1,n]\!], \mathbb{P}(X=k)=\mathbb{P}(Y=k)=\dfrac{1}{n}$ donc

$$\mathbb{P}(X=Y)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}=\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}.$$

2. On a $(X\geqslant Y)=\bigsqcup_{k=1}^{n}((X=k)\cap(Y\leqslant k))$ donc

$$\mathbb{P}(X\geqslant Y)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}((X=k)\cap(Y\leqslant k))=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y\leqslant k)$$

par indépendance de X et Y d'où $\mathbb{P}(X\geqslant Y)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}=\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{n+1}{2n}$.

3. La variable aléatoire $X-Y$ prend ses valeurs dans $[\![1-n,n-1]\!]$ et on a pour tout $k\in[\![1-n,n-1]\!]$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X-Y=k) &= \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}((Y=i)\cap(X=i+k))\\ &= \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(Y=i)\mathbb{P}(X=i+k)\quad \text{par indépendance de } X \text{ et } Y\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X=i+k)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=k+1}^{n+k}\mathbb{P}(X=j).\end{aligned}$$

- Si $k\leqslant 0$, on obtient $\mathbb{P}(X-Y=k)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n+k}\mathbb{P}(X=j)=\frac{n+k}{n^2}$.
- Si $k\geqslant 0$, on obtient $\mathbb{P}(X-Y=k)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=k+1}^{n}\mathbb{P}(X=j)=\frac{n-k}{n^2}$.

Finalement, pour tout $k\in[\![1-n,n-1]\!], \mathbb{P}(X-Y=k)=\dfrac{n-|k|}{n^2}$.

Exercice 2.

1. Soit $k \in [\![1, n-2]\!]$.
   On a $A_k \cap A_{k+1} = (X_k = 0, X_{k+1} = 1, X_{k+2} = 0) \cup (X_k = 1, X_{k+1} = 0, X_{k+2} = 1)$.
   Ces deux événements étant incompatibles, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_k \cap A_{k+1}) &= \mathbb{P}(X_k = 0, X_{k+1} = 1, X_{k+2} = 0) + \mathbb{P}(X_k = 1, X_{k+1} = 0, X_{k+2} = 1)\\ &= \mathbb{P}(X_k = 0)\mathbb{P}(X_{k+1} = 1)\mathbb{P}(X_{k+2} = 0) + \mathbb{P}(X_k = 1)\mathbb{P}(X_{k+1} = 0)\mathbb{P}(X_{k+2} = 1)\ (\text{indépen}\\ &= p(1-p)^2 + p^2(1-p)\\ &= p(1-p).\end{aligned}$$

2. Si les événements $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant n-1}$ sont deux à deux indépendants, alors nécessairement, pour tout $k \in [\![1, n-2]\!]$, on a $\mathbb{P}(A_k \cap A_{k+1}) = \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(A_{k+1})$.
   Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!], \mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(X_k = 0, X_{k+1} = 1) + \mathbb{P}(X_k = 1, X_{k+1} = 0) = 2p(1-p)$.
   On a donc $\mathbb{P}(A_k \cap A_{k+1}) = \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(A_{k+1}) \Leftrightarrow p(1-p) = 4p^2(1-p)^2$.
   Puisque $p(1-p) \neq 0$, ceci équivaut à $4p(1-p) = 1$ d'où $p = \dfrac{1}{2}$.
   De plus, si $|i - j| > 1$, les événements $A_i = (X_i \neq X_{i+1})$ et $A_j = (X_j \neq X_{j+1})$ sont indépendants d'après le lemme des coalitions quelle que soit la valeur de p puisque les variables aléatoires $(X_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ sont indépendantes
   Ainsi, les événements $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant n-1}$ sont deux à deux indépendants si et seulement si $p = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 3. On a $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ donc $Y(\Omega) = \left\{\dfrac{1}{1+k}, k \in [\![0, n]\!]\right\}$ et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a

$$\mathbb{P}\left(Y = \frac{1}{1+k}\right) = \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k}\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1} p^k (1-p)^{n-k}\\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k} p^{k-1} (1-p)^{n-k+1}\end{aligned}$$

• Si $p = 0$, on a $\mathbb{E}(Y) = 1$.
• Si $p \neq 0$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \frac{1}{p(n+1)}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k} p^k (1-p)^{n+1-k}\\ &= \frac{1}{p(n+1)}\left(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} p^k (1-p)^{n+1-k} - (1-p)^{n+1}\right)\\ &= \frac{(p+1-p)^{n+1} - (1-p)^{n+1}}{p(n+1)}\\ &= \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{p(n+1)}.\end{aligned}$$

Exercice 4.

1. On a $T(\Omega) = [\![1, 4]\!]$. Pour tout $k \in [\![1, 4]\!]$, notons A_k l'événement :« Le rat choisit la bonne porte au k-ème essai ».
   On a $\mathbb{P}(T = 1) = \mathbb{P}(A_1) = \dfrac{1}{4}$.
   Ensuite, $\mathbb{P}(T = 2) = \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_2 \cap \overline{A_1}) = \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}_{\overline{A_1}}(A_2) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{4}$.
   De même, $\mathbb{P}(T = 3) = \mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(A_3 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_1})$ et d'après la formule des probabilités composées, on obtient
   $$\mathbb{P}(T = 3) = \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}_{\overline{A_1}}(\overline{A_2})\mathbb{P}_{\overline{A_1} \cap \overline{A_2}}(A_3) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$
   Enfin, puisque $\mathbb{P}(T = 1) + \mathbb{P}(T = 2) + \mathbb{P}(T = 3) + \mathbb{P}(T = 4) = 1$, on en déduit que $\mathbb{P}(T = 4) = \dfrac{1}{4}$.
   Ainsi, T suit une loi uniforme sur $[\![1, 4]\!]$.
2. On a $\mathbb{E}(T) = \dfrac{4 + 1}{2} = \dfrac{5}{2} = 2,5$. Ainsi, le rat peut espérer sortir au bout de trois essais.

Exercice 5.

1. Puisque Y compte le nombre de cartes bien placées, on a $Y = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.
2. Par linéarité de l'espérance, on a $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Y_k)$.
   Par définition de l'espérance, on a pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,
   $$\mathbb{E}(Y_k) = 1 \times \mathbb{P}(Y_k = 1) + 0 \times \mathbb{P}(Y_k = 0) = \mathbb{P}(Y_k = 1).$$
   Par définition, $\mathbb{P}(Y_k = 1)$ est la probabilité que la k-ème carte soit bien placée.
   Dénombrons les permutations qui laissent fixes la k-ème carte. Puisque la position de la k-ème carte est imposée, il reste à permuter les $n - 1$ autres cartes, ce qui donne $(n - 1)!$ permutations qui laissent fixes la k-ème carte.
   Puisqu'il y a $n!$ permutations de l'ensemble des n cartes, la probabilité cherchée est $\mathbb{P}(Y_k = 1) = \dfrac{(n - 1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$ donc
   $$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = n \times \frac{1}{n} = 1.$$

Exercice 6. Soit $\Omega = [\![1, n]\!]$.
Notons T_1 et T_2 les variables aléatoires égales aux numéros obtenus aux premier et deuxième tirage respectivement.
Les variables aléatoires T_1 et T_2 suivent une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ et on a $M = \max(T_1, T_2)$.
La variable aléatoire M est définie sur Ω^2 et on a $M(\Omega^2) = \Omega$.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On a
$$(M = k) = ((T_1 = k) \cap (T_2 \leqslant k - 1)) \cup ((T_1 \leqslant k - 1) \cap (T_2 = k)) \cup ((T_1 = k) \cap (T_2 = k)).$$
Puisque c'est une union d'événements deux à deux incompatibles, on obtient
$$\mathbb{P}(M = k) = \mathbb{P}((T_1 = k) \cap (T_2 \leqslant k - 1)) + \mathbb{P}((T_1 \leqslant k - 1) \cap (T_2 = k)) + \mathbb{P}((T_1 = k) \cap (T_2 = k)).$$

Les tirages étant indépendants, les variables aléatoires T_1 et T_2 le sont également et on trouve :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M=k) &= \mathbb{P}(T_1=k)\mathbb{P}(T_2\leqslant k-1)+\mathbb{P}(T_1\leqslant k-1)\mathbb{P}(T_2=k)+\mathbb{P}(T_1=k)\mathbb{P}(T_2=k)\\
&= \frac{1}{n}\times\frac{k-1}{n}+\frac{k-1}{n}\times\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\\
&= \frac{2k-1}{n^2}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}(M)=\sum_{k=1}^{n}k\mathbb{P}(M=k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k^2-k}{n^2}=\frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2-\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{6n^2}-\frac{n(n+1)}{2n^2}$$

d'où

$$\mathbb{E}(M)=\frac{4n^3+6n^2+2n-3n^2-3n}{6n^2}=\frac{4n^2+3n-1}{6n}=\frac{(n+1)(4n-1)}{6n}.$$

Exercice 7.

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. On a $X_n(\Omega)=[\![0,b]\!]$ et $(X_{n+1}-X_n)(\Omega)=\{-1,1\}$.
   En utilisant la formule des probabilités totales dans le système complet d'événements $(X_n=k)_{0\leqslant k\leqslant b}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1}-X_n=1) &= \sum_{k=0}^{b}\mathbb{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1}-X_n=1)\mathbb{P}(X_n=k)\\
&= \sum_{k=0}^{b}\frac{b-k}{b}\mathbb{P}(X_n=k)\\
&= \sum_{k=0}^{b}\mathbb{P}(X_n=k)-\frac{1}{b}\sum_{k=0}^{b}k\mathbb{P}(X_n=k)\\
&= 1-\frac{\mathbb{E}(X_n)}{b}.
\end{aligned}$$

   Ainsi, $\mathbb{P}(X_n+1-X_n=-1)=1-\mathbb{P}(X_{n+1}-X_n=1)=\dfrac{\mathbb{E}(X_n)}{b}$ et on obtient

$$\mathbb{E}(X_{n+1}-X_n)=\mathbb{P}(X_{n+1}-X_n=1)-\mathbb{P}(X_{n+1}-X_n=-1)=1-\frac{2}{b}\mathbb{E}(X_n).$$

2. Par linéarité de l'espérance, on obtient $\mathbb{E}(X_{n+1}-X_n)=\mathbb{E}(X_{n+1})-\mathbb{E}(X_n)$ d'où

$$\mathbb{E}(X_{n+1})=1+\left(1-\frac{2}{b}\right)\mathbb{E}(X_n).$$

   La suite $(\mathbb{E}(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique de point fixe $\dfrac{b}{2}$ donc pour tout $n\in\mathbb{N},\mathbb{E}(X_n)=\left(1-\dfrac{2}{b}\right)^n\left(\mathbb{E}(X_0)-\dfrac{b}{2}\right)+\dfrac{b}{2}$.
   Puisque $b\geqslant 2$, on a $\left|1-\dfrac{2}{b}\right|<1$ donc $\lim\left(1-\dfrac{2}{b}\right)^n=0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{E}(X_n)=2$.

Exercice 8.

1. Le choix des lapins consiste en $2n$ expériences de Bernoulli indépendantes de paramètre $\frac{1}{2}$ donc M suit une loi binomiale de paramètres $(2n, \frac{1}{2})$.
   Par ailleurs, s'il y a M mâles, il y a $2n - M$ femelles et le nombre de couples qu'on peut former est le minimum entre le nombre de mâles et de femelles donc $C = \min(M, 2n-M)$.
2. La variable aléatoire C est à valeurs dans $[\![0, n]\!]$.
   Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a
$$\mathbb{P}(C = k) = \mathbb{P}((M = k) \cup (2n - M = k)) = \mathbb{P}((M = k) \cup (M = 2n - k)).$$
   - Si $k \neq n$, alors les événements $(M = k)$ et $(M = 2n - k)$ sont incompatibles donc
$$\mathbb{P}(C = k) = \mathbb{P}(M = k)+\mathbb{P}(M = 2n-k) = \binom{2n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}+\binom{2n}{2n-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\binom{2n}{k}}{2^{2n-1}}.$$
   - Si $k = n$, on obtient
$$\mathbb{P}(C = n) = \mathbb{P}(M = n) = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}.$$
3. D'après la formule de transfert, on a
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(C) &= \sum_{k=0}^{2n} \min(k, 2n - k)\mathbb{P}(M = k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k\binom{2n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k} + \sum_{k=n+1}^{2n} (2n - k)\binom{2n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k} \\
&= \frac{1}{2^{2n}}\left(2n\sum_{k=0}^{n}\binom{2n-1}{k-1} + \sum_{k=n+1}^{2n}(2n-k)\binom{2n}{2n-k}\right) \\
&= \frac{1}{2^{2n}}\left(2n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n}2n\binom{2n-1}{2n-k-1}\right) \\
&= \frac{n}{2^{2n-1}}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n}\binom{2n-1}{k}\right) \\
&= \frac{n}{2^{2n-1}}\left(\sum_{k=0}^{2n-1}\binom{2n-1}{k} - \binom{2n-1}{n}\right) \\
&= \frac{n(2^{2n-1} - \binom{2n-1}{n})}{2^{2n-1}}.
\end{aligned}$$

Exercice 9.

1. Tout d'abord, on remarque que S_n suit une loi binomiale de paramètres (n, p) puisque c'est une somme de n variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre p donc $\mathbb{E}(S_n) = np$.

   Par ailleurs, par linéarité de l'espérance, on a $\mathbb{E}(V_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{E}(Y_k) = \sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{E}(X_kX_{k+1})$. Or, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, les variables aléatoires X_k et X_{k+1} sont indépendantes donc $\mathbb{E}(X_kX_{k+1}) = \mathbb{E}(X_k)\mathbb{E}(X_{k+1}) = p^2$. Finalement, on a $\mathbb{E}(V_n) = (n - 1)p^2$.

2. Puisque $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, on a $V(S_n) = np(1-p)$.
Calculons $V(V_n)$ en utilisant la formule de König-Huygens, c'est à dire

$$V(V_n) = \mathbb{E}(V_n^2) - \mathbb{E}(V_n)^2.$$

On a $V_n^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} Y_k^2 + 2 \sum_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \\ i<j}} Y_iY_j$.

Par linéarité de l'espérance, il vient $\mathbb{E}(V_n^2) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(Y_k^2) + 2 \sum_{\substack{(i,j)\in[\![1,n-1]\!]^2 \\ i<j}} \mathbb{E}(Y_iY_j)$.

Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a $\mathbb{E}(Y_k^2) = \mathbb{E}(X_k^2X_{k+1}^2) = \mathbb{E}(X_kX_{k+1}) = \mathbb{E}(X_k)\mathbb{E}(X_{k+1}) = p^2$.
Par ailleurs, si $j > i+1$, on a $Y_iY_j = X_iX_{i+1}X_jX_{j+1}$ avec les variables aléatoires $X_i, X_{i+1}, X_j, X_{j+1}$ qui sont mutuellement indépendantes donc

$$\mathbb{E}(Y_iY_j) = \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_{i+1})\mathbb{E}(X_j)\mathbb{E}(X_{j+1}) = p^4.$$

Enfin, si $j = i+1$, on a

$$\mathbb{E}(Y_iY_j) = \mathbb{E}(Y_iY_{i+1}) = \mathbb{E}(X_iX_{i+1}^2X_{i+2}) = \mathbb{E}(X_iX_{i+1}X_{i+2}) = \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_{i+1})\mathbb{E}(X_{i+2}) = p^3.$$

Il y a $\dbinom{n-1}{2} = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ couples $(i,j) \in [\![1, n-1]\!]^2$ tels que $i < j$ et $n-2$ tels que $j = i+1$ donc $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2} - (n-2) = \dfrac{n^2-3n+2-2n+4}{2} = \dfrac{n^2-5n+6}{2} = \dfrac{(n-2)(n-3)}{2}$ tels que $j > i+1$.
On trouve donc

$$\mathbb{E}(V_n^2) = (n-1)p^2 + 2(n-2)p^3 + (n-2)(n-3)p^4 = p^2((n-1) + 2(n-2)p + (n-2)(n-3)p^2)$$

d'où finalement

$$V(V_n) = p^2((n-1)+2(n-2)p+(n-2)(n-3)p^2) - (n-1)^2p^4 = p^2((n-1)+2(n-2)p+(5-3n)p^2).$$