Corrigé de la liste d'exercices n°13 — Probabilités

Exercice 1. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A\cup B\cup C) &= \mathbb{P}((A\cup B)\cup C)\\
&= \mathbb{P}(A\cup B)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}((A\cup B)\cap C)\\
&= \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}((A\cap C)\cup(B\cap C))\\
&= \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}(A\cap C)-\mathbb{P}(B\cap C)+\mathbb{P}(A\cap B\cap C).
\end{aligned}$$

Exercice 2.

1. $$\mathcal{P}(E)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{7\},\{42\},\{1,2\},\{1,7\},\{1,42\},\{2,7\},\{2,42\},\{7,42\},\{1,2,7\},\{1,2,42\},\{1,7,42\},\{2,7,42\},E\}.$$
2. 2 n'est pas un élément de $\mathcal{P}(E)$ mais $\{2\}$ l'est. En revanche, on a bien $\emptyset\in\mathcal{P}(E)$.
3. Tous les éléments de A appartiennent à $\mathcal{P}(E)$ donc a bien $A\subset\mathcal{P}(E)$. Idem pour B.

Exercice 3.

1. $\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$.
2. $(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)$.
3. $(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)$.
4. $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$.

Exercice 4. • Soit $\Omega=[\![1,12]\!]$ muni de la probabilité uniforme. On note A l'événement « tirer un nombre pair », i.e ; $A=\{2,4,6,8,10,12\}$ et B l'événement « tirer un multiple de 3 », i.e. $B=\{3,6,9,12\}$.
On a d'une part $\mathbb{P}(A)=\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(B)=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$.
D'autre part $A\cap B$ est l'événement « tirer un multiple de 6 », i.e. $A\cap B=\{6,12\}$ donc $\mathbb{P}(A\cap B)=\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ donc les événements A et B sont indépendants.
• Si $\Omega=[\![1,13]\!]$, les événements A et B sont inchangés donc $\mathbb{P}(A)=\dfrac{6}{13},\mathbb{P}(B)=\dfrac{4}{13}$ et $\mathbb{P}(A\cap B)=\dfrac{2}{13}\neq\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ donc les événements A et B ne sont plus indépendants.

Exercice 5.

1. On est dans une situation d'équiprobabilité donc la probabilité que Bob gagne vaut le quotient $\dfrac{\text{nombre de mains gagnantes}}{\text{nombre de mains possibles}}$.
   Le nombre de mains possibles vaut $\dbinom{52}{5}$. Dénombrons maintenant le nombre de mains gagnantes, c'est à dire le nombre de mains de 5 cartes comportant l'as de pique. Si l'as de pique fait partie des 5 cartes, il reste à choisir 4 cartes parmi 51 pour compléter la main donc le nombre de mains gagnantes vaut $\dbinom{51}{4}$. La probabilité que Bob gagne vaut donc
   $$\frac{\binom{51}{4}}{\binom{52}{5}}=\frac{51!}{47!4!}\times\frac{47!5!}{52!}=\frac{5}{52}.$$

2. Notons B l'événement « Bob gagne »et A l'événement « Alice a retiré l'as de pique ». D'après la formule des probabilités totales dans le système complet d'événements $(A, \overline{A})$, on a
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}_{\overline{A}}(B).$$
Si Alice a retiré l'as de pique, Bob ne peut pas gagner donc $\mathbb{P}_A(B) = 0$.
L'événement $\overline{A}$ est réalisé si Alice n'a pas retiré l'as de pique, c'est à dire si elle a tiré 10 cartes parmi les 51 cartes qui ne sont pas l'as de pique donc
$$\mathbb{P}(\overline{A}) = \frac{\binom{51}{10}}{\binom{52}{10}} = \frac{51!}{10!41!}\frac{10!42!}{52!} = \frac{42}{52} = \frac{21}{26}.$$
Si Alice n'a pas retiré l'as de pique, Bob choisit donc 5 cartes parmi 42 qui contiennent l'as de pique donc
$$\mathbb{P}_{\overline{A}}(B) = \frac{\binom{41}{4}}{\binom{42}{5}} = \frac{41!}{4!47!}\frac{5!47!}{42!} = \frac{5}{42}$$
donc $\mathbb{P}(B) = \dfrac{21}{26}\dfrac{5}{42} = \dfrac{5}{52}$. La probabilité n'a donc pas changé !

Exercice 6.

1. Notons B l'événement « Bob gagne »et T l'événement « Bob triche ».
D'après la formule des probabilités totales dans le système complet d'événements $(T, \overline{T})$, on a
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(T)\mathbb{P}_T(B) + \mathbb{P}(\overline{T})\mathbb{P}_{\overline{T}}(B) = \frac{3}{10} \times \frac{3}{4} + \frac{7}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{23}{40}.$$
2. Notons G l'événement « Bob gagne 7 jours d'affilée »et A l'événement « Bob a triché au moins une fois ». Il s'agit de calculer $\mathbb{P}_G(A)$.
Puisque P_G est une probabilité, on a $P_G(A) = 1 - \mathbb{P}_G(\overline{A})$. Or, on a
$$\mathbb{P}_G(\overline{A}) = \frac{\mathbb{P}(\overline{A} \cap G)}{\mathbb{P}(G)} = \frac{\mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}_{\overline{A}}(G)}{\mathbb{P}(G)}.$$
On a $\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(B)^7 = \left(\dfrac{23}{40}\right)^7$.
Par ailleurs, $\overline{A}$ est l'événement « Bob n'a jamais triché »donc
$$\mathbb{P}(\overline{A}) = (1 - \mathbb{P}(T))^7 = \left(\frac{7}{10}\right)^7$$
et $\mathbb{P}_{\overline{A}}(G) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^7$ donc $\mathbb{P}_G(\overline{A}) = \dfrac{\left(\frac{7}{10}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^7}{\left(\frac{23}{40}\right)^7} = \left(\dfrac{14}{23}\right)^7$ d'où finalement
$$\mathbb{P}_G(A) = 1 - \left(\frac{14}{23}\right)^7 \simeq 0,97.$$

Exercice 7. Notons A_n l'événement « la boule tirée porte le numéro de la boîte dont on l'a extraite ».
On note également pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ l'événement B_k :« la boîte choisie est la boîte numéro k ».

Les événements $(B_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ forment un système complet d'événements donc on obtient d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(A_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}_{B_k}(A) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \times \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

On peut montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ donc quand le nombre de boîtes n tend vers l'infini, on a $\mathbb{P}(A_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$, donc cette probabilité tend vers 0 si le nombre de boîtes n tend vers $+\infty$.

Exercice 8. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'urne est constituée au temps n de $n+2$ boules parmi lesquelles le nombre de boules rouges est compris entre 1 et $n+1$ (et idem pour les boules vertes).
Montrons le résultat souhaité par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
• **Initialisation :** Pour $n = 0, S_0 = 1$ d'après l'énoncé donc $\mathbb{P}(S_0) = 1$, i.e. pour tout $k \in [\![1, n+1]\!] = \{1\}, \mathbb{P}(S_n = k) = \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{0+1} = 1$, donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
•**Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que la propriété est vraie au rang n, i.e. pour tout $k \in [\![1, n+1]\!], \mathbb{P}(S_n = k) = \dfrac{1}{n+1}$ et montrons la propriété au rang $n+1$, i.e. pour tout $k \in [\![1, n+2]\!], \mathbb{P}(S_{n+1} = k) = \dfrac{1}{n+2}$.
Soit $k \in [\![1, n+2]\!]$. D'après la formule des probabilités totales dans le système complet d'événements $(S_n = i)_{1\leqslant i\leqslant n+1}$, on a

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = k) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}(S_n = i)\mathbb{P}_{(S_n=i)}(S_{n+1} = k) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}_{(S_n=i)}(S_{n+1} = k),$$

où on a utilisé l'hypothèse de récurrence.
Or, d'après l'énoncé, s'il y a k boules rouges au temps $n+1$, il ne pouvait y avoir que k ou $k-1$ boules rouges au temps n donc $\mathbb{P}_{(S_n=i)}(S_{n+1} = k) = 0$ si $i \notin \{k, k-1\}$. Ainsi, il ne reste que

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = k) = \frac{1}{n+1}(\mathbb{P}_{(S_n=k-1)}(S_{n+1} = k) + \mathbb{P}_{(S_n=k)}(S_{n+1} = k)).$$

On a alors trois cas :
- Si $k = 1$, alors l'événement $(S_n = k-1) = (S_n = 0)$ est impossible et $\mathbb{P}_{(S_n=1)}(S_{n+1} = 1)$ représente la probabilité de tirer une boule verte dans une urne contenant $n+2$ boules dont $n+1$ vertes donc

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = 1) = \frac{\mathbb{P}_{(S_n=1)}(S_{n+1} = 1)}{n+1} = \frac{1}{n+1} \times \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2}.$$

- Si $k = n+2$, alors l'événement $(S_n = k) = (S_n = n+2)$ est impossible et $\mathbb{P}_{(S_n=n+1)}(S_{n+1} = n+2)$ représente la probabilité de tirer une boule rouge dans une urne contenant $n+2$ boules dont $n+1$ rouges donc

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = n+2) = \frac{\mathbb{P}_{(S_n=n+1)}(S_{n+1} = n+2)}{n+1} = \frac{1}{n+1} \times \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2}.$$

- Si $k \in [\![2, n+1]\!]$, alors $\mathbb{P}_{(S_n=k-1)}(S_{n+1} = k)$ représente la probabilité de tirer une boule rouge dans urne contenant $n+2$ boules dont $k-1$ rouges et $\mathbb{P}_{(S_n=k)}(S_{n+1} = k)$ représente la probabilité de tirer une boule verte dans une urne contenant $n+2$ boules dont $n+2-k$ vertes donc

$$\mathbb{P}(S_{n+1}=k)=\frac{1}{n+1}\left(\frac{k-1}{n+2}+\frac{n+2-k}{n+2}\right)=\frac{1}{n+1}\times\frac{n+1}{n+2}=\frac{1}{n+2}.$$

Finalement, pour tout $k\in[\![1,n+2]\!], \mathbb{P}(S_{n+1}=k)=\dfrac{1}{n+2}$, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.
On dit que pour tout $n\in\mathbb{N}$, la variable aléatoire S_n suit une loi uniforme sur $[\![1,n+1]\!]$.

Exercice 9. Chaque élève a 365 anniversaires possibles donc $\Omega=[\![1,365]\!]^{47}$, d'où $\mathrm{Card}(\Omega)=365^{47}$.
Notons A l'événement« Au moins deux élèves partagent le même anniversaire ». On a alors $\overline{A}$:« aucun élève ne partage le même anniversaire ».
Calculons $\mathbb{P}(\overline{A})$. Calculons le nombre de 47-uplets de dates d'anniversaire qui conviennent. On commence par choisir 47 dates d'anniversaire différents (cela peut se faire de $\binom{365}{47}$) façons différentes puis on les attribue à chacun des élèves (cela peut se faire de 47! façons possibles). On a donc

$$\mathbb{P}(\overline{A})=\frac{47!\binom{365}{47}}{365^{47}}=\frac{365!}{318!\times 365^{47}}=\frac{365}{365}\times\frac{364}{365}\times\cdots\times\frac{319}{365}\simeq 0,05$$

donc $\mathbb{P}(A)=1-\mathbb{P}(\overline{A})\simeq 0,95$.