Liste d'exercices n°15 — Limites et continuité

Exercice 1. Calculer, si elles existent, les limites en 0 et en $+\infty$ des fonctions suivantes.

1. $f : x \longmapsto \dfrac{(x^2+\cos(x)-14)\sin(e^{-x})}{(\ln(x)+\sqrt{x})\ln(1+x)}$
2. $g : x \longmapsto \dfrac{(x^3+\sin(x^2))^2\sqrt{14+x}}{(e^{x^3}-1)(x+x^2\ln(x))}$

Exercice 2. Calculer, si elles existent, les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt{x^2+x}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to0}\left(\cos(x)\right)^{\frac{1}{\sin^2(x)}}$
3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x\ln(x))}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{-x^2+x+6}{x^2+9-6x}$
5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(\sin(x))-1}{\tan^3(x)-2\sin^2(x)}$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\lfloor x\rfloor\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin(x)$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{2x}\right)$
9. $\lim\limits_{x\to0}\left(\exp(\sin(x))-\sin^2(x)\right)^{\frac{1}{\sin(x)}}$

Exercice 3. Soit f une fonction monotone sur un intervalle $I=]a,b[$, avec a et b éventuellement infinis.
Montrer que la fonction f admet en tout point x_0 des limites à gauche et à droite finies.

Exercice 4. Soient f et g les fonctions suivantes :

$$f\colon x\longmapsto\frac{1-\cos(2\pi x)}{x^2\ln(x)}\quad\text{et}\quad g\colon x\longmapsto\frac{\sin(x^2)}{\sqrt{x+4}-2}.$$

1. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
2. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 1 ?
3. La fonction g est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Exercice 5. Les fonctions suivantes sont-elles continues ?

1. $f : x \longmapsto \begin{cases}\dfrac{(x+2)(x-1)}{x\ln(x)} & \text{si } x>0 \text{ et } x\neq1\\ 3 & \text{si } x=1\end{cases}$
2. $g : x\longmapsto\lfloor x\rfloor\sin(\pi x)$
3. $h : x \longmapsto \begin{cases}\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{2}{\cos(x)}+\cos(x)-3\right) & \text{si } x\in\left]-\frac{\pi}{2};0\right[\cup\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x=0\end{cases}$

Exercice 6. Soit I un intervalle, soient $f,g : I\longrightarrow\mathbb{R}$ des fonctions continues.
Montrer que les fonctions $\max(f,g) : x\longmapsto\max(f(x),g(x))$ et $\min(f,g) : x\longmapsto\min(f(x),g(x))$ sont continues sur I.

Exercice 7. Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ avec $a\leqslant b$. Soit $f : [a,b]\longrightarrow[a,b]$ une fonction continue.
Montrer que f possède au moins un point fixe.

Exercice 8. Soit g une fonction périodique définie sur $\mathbb{R}$. On suppose que g admet une limite en $+\infty$. Montrer que g est constante.

Exercice 9. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que f admet une limite finie en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrer que f est bornée.

Exercice 10. Etablir que les équations suivantes, d'inconnue x réelle, admettent au moins une solution.

1. $x^{17} + x^3 \sin(x) = 1$.
2. $x^2 \cos(x) + x \sin(x) = -1$.

Exercice 11. Déterminer toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues vérifiant la propriété suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x)^2 - f(x) = 0.$$

Exercice 12. Pour $n \geqslant 3$, on pose $P_n(x) = x^n - nx + 1$.

1. Montrer que P_n admet un unique zéro sur $[0, 1]$ noté u_n.
2. Encadrer u_n à l'aide de $\dfrac{1}{n}$ et $\dfrac{2}{n}$.
3. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\geqslant 3}$ puis un équivalent de u_n.

Exercice 13. Pour tout entier naturel non nul n, on considère la fonction suivante :

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n + 2x^2 + x - 1. \end{array}$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, il existe un unique point x_n appartenant à $[0; \frac{1}{2}]$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a $f_{n+1}(x_n) \leqslant 0$.
3. En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
4. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 14. Considérons la fonction suivante :

$$f\colon x \longmapsto \sqrt{x^2+1} - x.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f. On le notera $\mathcal{D}_f$.
2. Montrer que la fonction f réalise une bijection de $\mathcal{D}_f$ sur un ensemble que l'on précisera.

Exercice 15. On souhaite déterminer toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$, continues en 0, vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2x).$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $f\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = f(x)$.
2. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0)$.
3. Conclure.

Exercices colle

Exercice 16. Soit $f[0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $f(0) = f(1)$.
Montrer que pour tout $n \geqslant 2, \exists x \in [0, 1], f(x + \frac{1}{n}) = f(x)$.
Penser à $\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k+1}{n}) - f(\frac{k}{n})$.

Exercice 17. Soit f continue sur $[a, b]$ telle que $[a, b] \subset f([a, b])$.
Montrer que f admet un point fixe.