Corrigé du devoir maison n°10

Problème

Partie I : Première expérience

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après l'énoncé, au k-ème tirage, l'urne est constituée de $k+1$ boules réparties comme suit : k blanches et une noire si la pièce a donné pile, une boule blanche et k noires si la pièce a donné face.
   On considère les événements P :≪ la pièce a donné pile ≫et $\overline{P}$:≪ la pièce a donné face ≫.
   Soit A_k l'événement :≪ on tire une boule blanche au k-ème tirage ≫.
   D'après la formule des probabilités totales dans le système complet d'événements $(P, \overline{P})$, on obtient
   $$\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(P)\mathbb{P}_P(A_k) + \mathbb{P}(\overline{P})\mathbb{P}_{\overline{P}}(A_k) = \frac{1}{2} \times \frac{k}{k+1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{k+1}{k+1}\right)$$
   donc $\boxed{\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{2}.}$

2. Avec les notations de la question précédente, la probabilité à calculer est $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right)$.
   D'après la formule des proabilités totales, on a
   $$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) = \mathbb{P}(P) \times \mathbb{P}_P\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) + \mathbb{P}(\overline{P}) \times \mathbb{P}_{\overline{P}}\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}_P\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) + \mathbb{P}_{\overline{P}}\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right)\right).$$
   D'après la formule des probabilités composées pour la probabilité $\mathbb{P}_P$, on obtient
   $$\mathbb{P}_P\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) = \mathbb{P}_P(A_1) \times \mathbb{P}_{P \cap A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{P \cap A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times \mathbb{P}_{P \cap A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1}}(A_k).$$
   Or, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, la réalisation des événements A_j pour $j < i$ n'a aucune influence sur la réalisation de A_i donc $\mathbb{P}_{P \cap A_1 \cap \cdots \cap A_{i-1}}(A_i) = \mathbb{P}_P(A_i) = \frac{i}{i+1}$ d'où
   $$\mathbb{P}_P\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) = \prod_{i=1}^{k} \frac{i}{i+1} = \frac{1}{k+1}.$$
   De même, on a
   $$\mathbb{P}_{\overline{P}}\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) = \mathbb{P}_{\overline{P}}(A_1) \times \mathbb{P}_{\overline{P} \cap A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{\overline{P} \cap A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times \mathbb{P}_{\overline{P} \cap A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1}}(A_k),$$
   puis pour tout $i \in [\![1, k]\!], \mathbb{P}_{\overline{P} \cap A_1 \cap \cdots \cap A_{i-1}}(A_i) = \mathbb{P}_{\overline{P}}(A_i) = \frac{1}{i+1}$ d'où
   $$\mathbb{P}_{\overline{P}}\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{i+1} = \frac{1}{(k+1)!}.$$

Finalement, on en déduit que

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)!}\right) = \frac{k!+1}{2(k+1)!}.}$$

3. Il s'agit de calculer $\mathbb{P}_{A_k}(P)$. D'après la formule de conditionnement, on a

$$\mathbb{P}_{A_k}(P) = \frac{\mathbb{P}(A_k \cap P)}{\mathbb{P}(A_k)} = \frac{\mathbb{P}(P)\mathbb{P}_P(A_k)}{\mathbb{P}(A_k)}.$$

Or, on a vu que $\mathbb{P}(P) = \mathbb{P}(A_k) = \dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}_P(A_k) = \dfrac{k}{k+1}$ donc $\boxed{\mathbb{P}_{A_k}(P) = \dfrac{k}{k+1}.}$

Partie II : Deuxième expérience

1. (a) Il y avait une boule blanche dans l'urne au début de l'expérience. Si l'urne contient $n+1$ boules blanches au début du k-ème tirage, ceci signifie qu'on a ajouté n boules blanches, c'est à dire que lors des $k-1$ premières expériences, lors de l'étape i), la pile a donné n fois pile et $k-1-n$ fois face.

Notons Y la variable aléatoire égale au nombre de fois que la pièce a donné pile lors des $k-1$ premières expériences. Puisque les lancers de pièce sont indépendants et que la pièce est équilibrée, ceci correspond au nombre de succès lors de la réalisation successive de $k-1$ épreuves de Bernoulli de même paramètre $\dfrac{1}{2}$.

Ainsi, Y suit une loi binomiale de paramètres $(k-1, \frac{1}{2})$, i.e. $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(k-1, \frac{1}{2})$.

Finalement la probabilité cherchée est

$$\boxed{\mathbb{P}(T_{k,n}) = \mathbb{P}(Y = n) = \binom{k-1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1-n} = \binom{k-1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}.}$$

(b) On a $\displaystyle\sum_{q=0}^{k}\binom{k}{q}q = \sum_{q=1}^{k}\binom{k}{q}q$.

Or, pour tout $q \in [\![1, k]\!]$, puisque q et k sont non nuls, on a d'après la formule du capitaine $\dfrac{k}{q}\dbinom{k-1}{q-1} = \dbinom{k}{q}$ d'où $\dbinom{k}{q}q = k\dbinom{k-1}{q-1}$ donc

$$\sum_{q=1}^{k}\binom{k}{q}q = k\sum_{q=1}^{k}\binom{k-1}{q-1} = k\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i} = k2^{k-1}.$$

Ainsi, $\boxed{\displaystyle\sum_{q=0}^{k}\binom{k}{q}q = k2^{k-1}.}$

(c) Au k-ème tirage, l'urne est constituée de $k+1$ boules donc un nombre de boules blanches compris entre 1 et k donc les événements $(T_{k,n})_{n\in[\![0,k-1]\!]}$ forment un système complet d'événements.

• Si $k = 1$, on a $\mathbb{P}(A_1) = \dfrac{1}{2}$ puisque l'urne est constituée d'une boule blanche et d'une boule noire.

• Supposons désormais $k \geqslant 2$.

D'après la formule des probabilité totales, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_k) &= \sum_{n=0}^{k-1} \mathbb{P}(T_{k,n})\mathbb{P}_{T_{k,n}}(A_k) \\
&= \sum_{n=0}^{k-1} \binom{k-1}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \frac{n+1}{k+1} \\
&= \frac{1}{2^{k-1}(k+1)} \left(\sum_{n=0}^{k-1} \binom{k-1}{n} n + \sum_{n=0}^{k-1} \binom{k-1}{n} \right) \\
&= \frac{1}{2^{k-1}(k+1)} ((k-1)2^{k-2} + 2^{k-1}) \text{ (question précédente appliquée pour } k-1 \geqslant 1) \\
&= \frac{2^{k-2}}{2^{k-1}(k+1)} (k-1+2)
\end{aligned}$$

d'où $\boxed{\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{2}.}$

Ce résultat n'est pas surprenant car la situtation est totalement symétrique entre les boules blanches et les boules noires.

2. Le résultat du lancer de la pièce de monnaie au k-ème tirage n'influe sur la composition de l'urne que pour le $k+1$-ème tirage donc n'a aucune influence sur la composition de l'urne au k-ème tirage. Ceci signifie que les événements B_k et $T_{k,n}$ sont indépendants.

3. (a) Soit $n \in [\![0, k-1]\!]$.

• Calculons $\mathbb{P}_{B_k \cap T_{k,n}}(A_{k+1})$. Il s'agit de calculer la probabilité de tirer une boule blanche au $k+1$-ème tirage sachant qu'il y avait $n+1$ boules blanches dans l'urne au début du k-ème tirage et qu'au tirage k on a obtenu pile. Ceci signifie qu'on a ajouté une boule blanche après le k-ème tirage donc au début du $k+1$-ème tirage, il y a $n+2$ boules blanches parmi $k+2$ boules donc $\boxed{\mathbb{P}_{B_k \cap T_{k,n}}(A_{k+1}) = \frac{n+2}{k+2}.}$

• Calculons $\mathbb{P}_{\overline{B_k} \cap T_{k,n}}(A_{k+1})$. Il s'agit de calculer la probabilité de tirer une boule blanche au $k+1$-ème tirage sachant qu'il y avait $n+1$ boules blanches dans l'urne au début du k-ème tirage et qu'au tirage k on a obtenu face. Ceci signifie qu'on a ajouté une boule noire après le k-ème tirage donc au début du $k+1$-ème tirage, il y a $n+1$ boules blanches parmi $k+2$ boules donc $\boxed{\mathbb{P}_{\overline{B_k} \cap T_{k,n}}(A_{k+1}) = \frac{n+1}{k+2}.}$

(b) D'après la formule des probabilités totales dans le système complet d'événements $(T_{k,n})_{n \in [\![0,k-1]\!]}$ (pour la probabilité $\mathbb{P}_{B_k}$), on a

$$\mathbb{P}_{B_k}(A_{k+1}) = \sum_{n=0}^{k-1} \mathbb{P}_{B_k}(T_{k,n}) \times \mathbb{P}_{B_k \cap T_{k,n}}(A_{k+1}).$$

Or, d'après la question 2, les événements B_k et $T_{k,n}$ sont indépendants donc $\mathbb{P}_{B_k}(T_{k,n}) = \mathbb{P}(T_{k,n})$ d'où $\boxed{\mathbb{P}_{B_k}(A_{k+1}) = \sum_{n=0}^{k-1} \mathbb{P}(T_{k,n}) \times \mathbb{P}_{B_k \cap T_{k,n}}(A_{k+1}).}$

De même, puisque les événements B_k et $T_{k,n}$ sont indépendants, les événements $\overline{B_k}$ et $T_{k,n}$ le sont aussi.

En utilisant la formule des probabilités totales dans le système complet d'événements

$(T_{k,n})_{n\in[\![0,k-1]\!]}$ (pour la probabilité $\mathbb{P}_{\overline{B_k}}$), on obtient par un raisonnement similaire

$$\boxed{\mathbb{P}_{\overline{B_k}}(A_{k+1}) = \sum_{n=0}^{k-1} \mathbb{P}(T_{k,n}) \times \mathbb{P}_{\overline{B_k}\cap T_{k,n}}(A_{k+1}).}$$

(c) D'après la question 1.(a), $\mathbb{P}(T_{k,n}) = \binom{k-1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ et $\mathbb{P}_{B_k\cap T_{k,n}}(A_{k+1}) = \frac{n+2}{k+2}$ d'après la question 3.(a) donc

$$\mathbb{P}_{B_k}(A_{k+1}) = \sum_{n=0}^{k-1} \binom{k-1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \times \frac{n+2}{k+2}.$$

• Si $k=1$, on trouve $P_{B_1}(A_2) = \frac{2}{3} \neq \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A_2)$ d'après la question 1.(c), donc les événements B_1 et A_2 ne sont pas indépendants.

• Supposons $k \geqslant 2$. Par un calcul similaire à celui de la question 1.(c), on trouve

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{B_k}(A_{k+1}) &= \frac{1}{2^{k-1}(k+2)}\left(\sum_{n=0}^{k-1}\binom{k-1}{n}n + 2\sum_{n=0}^{k-1}\binom{k-1}{n}\right)\\
&= \frac{1}{2^{k-1}(k+2)}\left((k-1)2^{k-2}+2^k\right)\\
&= \frac{2^{k-2}(k-1+4)}{2^{k-1}(k+2)}\\
&= \frac{k+3}{2k+4}.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a $\mathbb{P}_{B_k}(A_{k+1}) > \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A_{k+1})$ donc $\boxed{\text{les événements } A_{k+1} \text{ et } B_k \text{ ne sont pas indépendants.}}$
Cela conforte notre intuition puisque la constitution de l'urne au $k+1$-ème tirage dépend du k-ème lancer de pièce.

4. Calculons $\mathbb{P}_{A_2}(A_3)$.
Les trois premiers tirages dépendent uniquement des deux premiers lancers de la pièce. Nous allons donc calculer $\mathbb{P}_{A_2}(A_3)$ en utilisant la formule des probabilités totales dans le système complet d'événements $(B_1\cap B_2, B_1\cap\overline{B_2}, \overline{B_1}\cap B_2, \overline{B_1}\cap\overline{B_2})$ pour la probabilité $\mathbb{P}_{A_2}$. Il vient :

$$\mathbb{P}_{A_2}(A_3) = \mathbb{P}_{A_2}(B_1\cap B_2)\mathbb{P}_{A_2\cap B_1\cap B_2}(A_3) + \mathbb{P}_{A_2}(B_1\cap\overline{B_2})\mathbb{P}_{A_2\cap B_1\cap\overline{B_2}}(A_3) + \mathbb{P}_{A_2}(\overline{B_1}\cap B_2)\mathbb{P}_{A_2\cap\overline{B_1}\cap B_2}(A_3)$$
$$+\mathbb{P}_{A_2}(\overline{B_1}\cap\overline{B_2})\mathbb{P}_{A_2\cap\overline{B_1}\cap\overline{B_2}}(A_3).$$

• On a en utilisant la définition d'une probabilité conditionnelle puis la formule des probabilités composées

$$\mathbb{P}_{A_2}(B_1\cap B_2) = \frac{\mathbb{P}(B_1\cap B_2\cap A_2)}{\mathbb{P}(A_2)} = 2\mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(A_2)\mathbb{P}_{B_1\cap A_2}(B_2) = 2\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

car $\mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}_{B_1}(A_2) = \frac{2}{3}$ d'après la question précédente et le résultat du deuxième lancer de pièce ne dépend ni du premier ni du résultat du deuxième tirage.

• La réalisation de A_3 est entièrement déterminée par la composition de l'urne, c'est à dire par la réalisation des événements B_1 et B_2 donc $\mathbb{P}_{A_2\cap B_1\cap B_2}(A_3) = \mathbb{P}_{B_1\cap B_2}(A_3) = \dfrac{3}{4}$ (car si on a obtenu deux fois pile, l'urne est constituée de 4 boules dont 3 blanches au début du 3-ème tirage). Attention, on ne dit pas ici que A_3 ne dépend pas de A_2 (ce qui est faux, comme on le verra dans le résultat final). En effet, la réalisation de A_2 dépend de B_1, dont dépend également A_3. On dit simplement que la connaissance de $A_2 \cap B_1 \cap B_2$ pour la réalisation de A_3 revient à la connaissance de $B_1 \cap B_2$.

• De même,

$$\mathbb{P}_{A_2}(B_1 \cap \overline{B_2}) = \frac{\mathbb{P}(B_1 \cap \overline{B_2} \cap A_2)}{\mathbb{P}(A_2)} = 2\mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(A_2)\mathbb{P}_{B_1\cap A_2}(\overline{B_2}) = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

• De même que précédemment, $\mathbb{P}_{A_2\cap B_1\cap\overline{B_2}}(A_3) = \mathbb{P}_{B_1\cap\overline{B_2}}(A_3) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ car si on a obtenu une fois pile et une fois face, l'urne est constituée de 2 boules blanches et 2 boules noires au début du 3-ème tirage.

• De même,

$$\mathbb{P}_{A_2}(\overline{B_1} \cap B_2) = \frac{\mathbb{P}(\overline{B_1} \cap B_2 \cap A_2)}{\mathbb{P}(A_2)} = 2\mathbb{P}(\overline{B_1})\mathbb{P}_{\overline{B_1}}(A_2)\mathbb{P}_{\overline{B_1}\cap A_2}(B_2) = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

car $\mathbb{P}_{\overline{B_1}}(A_2)$ est la probabilité de tirer une boule blanche dans une urne contenant 3 boules dont une seule blanche.

• De même que précédemment, $\mathbb{P}_{A_2\cap\overline{B_1}\cap B_2}(A_3) = \mathbb{P}_{\overline{B_1}\cap B_2}(A_3) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ car si on a obtenu une fois pile et une fois face, l'urne est constituée de 2 boules blanches et 2 boules noires au début du 3-ème tirage.

• Enfin,

$$\mathbb{P}_{A_2}(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}) = \frac{\mathbb{P}(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap A_2)}{\mathbb{P}(A_2)} = 2\mathbb{P}(\overline{B_1})\mathbb{P}_{\overline{B_1}}(A_2) \times \mathbb{P}_{\overline{B_1}\cap A_2}(\overline{B_2}) = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

• Enfin, $\mathbb{P}_{A_2\cap\overline{B_1}\cap\overline{B_2}}(A_3) = \mathbb{P}_{\overline{B_1}\cap\overline{B_2}}(A_3) = \dfrac{1}{4}$ car si on a obtenu deux fois face, l'urne est constituée de 1 boule blanche et 3 boules noires au début du 3-ème tirage.

Finalement, on a donc

$$\mathbb{P}_{A_2}(A_3) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{6}{24} + \frac{4}{24} + \frac{2}{24} + \frac{1}{24} = \frac{13}{24}.$$

Ainsi, $\mathbb{P}_{A_2}(A_3) > \dfrac{1}{2} = \mathbb{P}(A_3)$ donc $\boxed{\text{les événements } A_2 \text{ et } A_3 \text{ ne sont pas indépendants.}}$